再版前言

自本书初版问世以来，得到了我在天文界和物理界不少同行朋友的好评.他们希望能在原版基础上，增加一些近十年来天体物理辐射理论及应用方面的新内容，争取本书的再版；希望新版既可做为天文界和物理界相关研究工作者手边有用的参考书，又可满足天文学研究生和本科生教学用书的需要.受到他们的鼓励，又得到中国科学院科学出版基金专家委员会的大力支持和资助，我决定对原书增改再版.由于近年事务繁忙，修改工作总是时断时续.许多新内容我并不熟悉，一些章节的讲述舍取也颇费心力，常常犹疑不定，踌躇再三，耗费不少精力和时间，直到现在方能脱稿.在此谨向那些盼望本书出版的读者，特别是急需教材的青年学生致歉.

新版有些章节是重写的，或变动较大.此外增添了不少重要的新内容，这使新版篇幅明显增加.希望读者理解增扩和修改的必要性，并从中受益.新版主要增改如下：第一章§1.4介绍斯托克斯参量的章节是重写的.这些描述辐射偏振特性的参量的引进和物理讨论，一般书上都缺少诱导和启发性，总给初学读者生硬和不自然的印象.作者根据多年教学体验，对讲述方法做新的安排，期望有更好效果.第三章有关辐射转移理论，是对原版有最大改动的一章.从§3.5到§3.8四节都是新增内容，非常重要.§3.5介绍处理谱线辐射转移的近似方法——逃逸概率法.§3.6—§3.8介绍光子-电子间弹性和非弹性散射造成的辐射转移问题.其中谈到的康普顿化过程，特别是康普顿软化过程的定量理论，在X射线和γ射线天文学中起重要作用，讲述中简要介绍了作者及其合作者近年在这方面的一些工作.第四章§4.1中增加了重要一段，讨论回旋辐射的量子理论，跃迁概率，回旋共振吸收系数，回旋共振吸收(或共振散射)截面，以适应近年快速发展的X射线和γ射线天文

学的需要.第五章的新内容是§5.5有关强磁场中相对论电子的磁逆康普顿散射的介绍.这种散射具有共振性质,效率远高于自由电子逆康普顿散射,在γ射线天文学中有一定重要性.§5.7介绍电子对湮灭的逆过程——双光子湮灭产生电子对.这在γ射线天文学中很值得注意——高能γ光子穿过低频辐射场时的湮灭效应(也就是γ光子被吸收),其重要性有时可与γ光子穿过"低温"等离子体时的康普顿软化效应相比.§5.8介绍高能光子在强磁场中被吸收转化成电子对过程.最后,第九章§9.5,即本书最后一节几乎是重写的,专门介绍作者及其合作者有关切仑柯夫线辐射及其在高能天体物理中可能的应用.这是一种全新的原子、分子谱线辐射机制,我们认为在高能天体物理中有潜在应用前景,而且得到了中国科学技术大学徐克尊、杨炳忻、奚富云实验小组完美的实验证实,因此有必要作出更清晰的物理解释,并给出简单实用的公式.

作者衷心感谢我国天文界前辈王绶琯先生对本书再版计划始终一致的关心和支持.作者还由衷感谢南京大学陆埮教授,北京大学乔国俊教授,中国科学院高能物理研究所李惕培教授、吴枚教授,中国科学技术大学阮图南教授、刘永镇教授在本书写作过程中有益的讨论和支持.上海交通大学徐宏华教授,陈军峰副教授协助作者对增补的有关章节提出修改意见,上海天文台傅承启教授详细指出本书初版中的疏漏和错误,作者在此一并表示谢意.

尤峻汉

于上海交通大学应用物理系

空间天体物理研究室

1996年8月

第 一 版 序

1978年,已故戴文赛教授在病榻上和几位同志倡议编写一套《天体物理学丛书》.这个倡议得到了天文界的响应和出版界的支持.当时"四害"已除,科学园地中严冰初破,万象春回.广大天文工作者怀着急切的心情整顿自己的队伍,重新投入到学科建设.文赛同志和大家意识到整顿的第一步应是重打基础.我们失去的这十年,正是国际上天文学突飞猛进的十年.随着这一时期射电、空间和地面天文实测手段的长足进步,重大天文发现接踵面来,理论物理学和天文学的学科渗透空前活跃.这一切给当代天文研究带来了一个面临飞跃的前景.面对这个前景,如何夺回十年动乱中失去的时间是我们当前两代天文工作者必须首先考虑的问题.于是,大家设想,在起步之际是否可以组织天文战线上的"老兵",分头先就各人所长的学科领域,系统地更新知识,写成讲义,互教互学;并在此基础上整理成书,用以为源源加入天文队伍的"新兵"及时地搭桥铺路.书拟分两辑.这一辑侧重于理论天体物理学的重要分支和几个主要天文实测手段的技术和方法,读者对象为天体物理专业的研究生,当然也适于天文和有关物理学科的科研、教学工作者参考.

现在丛书各册即将陆续问世.几年来我们国家经历了拨乱反正,我国的天文工作者和全国人民一致步调,正抱着振兴祖国天文事业的志向,稳步登攀科学研究的崎岖道路.在这伟大的旅程中,我们将以这部丛书作为路旁岩石上的一方铭镌,记载着这一年代我国天文学的里程,并以此纪念我们的同志、本丛书许多作者的老师和朋友——为新中国天文建设事业殚竭心力,奋斗一生的戴文赛教授.

王绶琯

1982年12月,北京

第 一 版 前 言

在天体物理学和空间物理学中，辐射过程的研究有着十分重要的意义. 对各类天体的性质、结构和演化的了解，几乎完全依靠由辐射带来的信息.

目前已经有了一些有关辐射问题的专著，但或者由于内容范围偏窄，或者由于内容有些陈旧，或者由于偏重于数学推导，致使初学者难以把握其物理实质. 因此，在编写本书时，作者希望对上述情况有所改进. 本书旨在更为清楚地阐明各种辐射过程的图像和实质. 尽管本书也作了比较详细的公式推导，但略去了一些烦琐的演算细节，仅列出必要的参考文献和书目. 此外，虽然本书侧重于基本的物理探讨，但也注意到了实际应用，并对近年来的一些进展作了简略的介绍.

本书的读者对象不仅仅是天体物理专业的研究生、高年级大学生和天体物理工作者，而且也包括从事空间物理学、等离子体物理学、光谱学和发光学的工作人员. 对那些以同步辐射加速器作为强辐射源从事研究工作的人员，本书也有一定的参考价值.

在本书的编写过程中，王绶琯先生自始至终予以关心和支持，查长生、赵叔晖和吴北珍等协助绘制了全部插图. 在此，作者向他们致以衷心的感谢.

尤峻汉

目　录

常用物理及天文常数表

以下常数中，按照天体物理学的惯例，除非特别注明者外，都采用c.g.s 单位制. 下列符号表示的意义及数值如下：

符　号	意　　义	数　　值
c	真空中的光速	$2.99792458(12)\times10^{10}\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$
h	普朗克常量	$6.626176(36)\times10^{-27}\mathrm{erg}^{*}\cdot\mathrm{s}$
$\hbar=h/2\pi$	合理化普朗克常量	$1.0545887(57)\times10^{-27}\mathrm{erg\cdot s}$
k	玻耳兹曼常量	$1.380662(44)\times10^{-16}\mathrm{erg\cdot K^{-1}}$
e	电子的基本电荷	$4.803242(14)\times10^{-10}\mathrm{e.s.u.}^{**}$
m	电子静质量	$9.109534(47)\times10^{-28}\mathrm{g}$
m_p	质子静质量	$1.6726485\times10^{-24}\mathrm{g}$
G	引力常量	$6.6720(41)\times10^{-8}\mathrm{dyn}^{***}\cdot\mathrm{cm^2\cdot g^{-2}}$
N_A	阿伏伽德罗常量	$6.022045(31)\times10^{23}\mathrm{mol^{-1}}$
u	原子质量单位	$1.6605655(86)\times10^{-24}\mathrm{g}$
$\alpha=e^2/\hbar c$	精细结构常量	$7.2973506(60)\times10^{-3}$
e/m	电子荷质比	$5.272764(15)\times10^{17}\mathrm{e.s.u.\cdot g^{-1}}$
R_∞	里德伯常量	$1.097373177(83)\times10^{5}\mathrm{cm^{-1}}$
a_0	玻尔半径	$5.2917706(44)\times10^{-9}\mathrm{cm}$
$h/(mc)$	康普顿波长	$2.4263089(40)\times10^{-10}\mathrm{cm}$
$r_0=e^2/(mc^2)$	经典电子半径	$2.8179380(70)\times10^{-13}\mathrm{cm}$
R	气体常量	$8.31441(26)\times10^{7}\mathrm{erg\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
σ	斯特藩-玻耳兹曼常量	$5.67032(71)\times10^{-5}\mathrm{erg\cdot cm^{-2}\cdot s^{-1}\cdot K^{-4}}$
a	玻耳兹曼能量密度常量(辐射场能	$7.56566\times10^{-15}\mathrm{erg\cdot K^{-4}\cdot cm^{-3}}$

续表

符　号	意　　义	数　　值
	密度 $u=aT^4$ 中的系数)	
σ_t	汤姆孙截面	$6.652448(33)\times10^{-25}cm^2$
A	天文单位，也称单位距离	$1.49597870\times10^{13}cm$
pc	秒差距	$3.08567756\times10^{18}cm$
		$=206264.806A$
		$=3.26163342l.y.$
l.y.	光年	$9.46052841\times10^{17}cm$
		$=6.32397267\times10^4A$
		$=0.306594847pc$
$M_\odot$	太阳质量	$1.9891\times10^{33}g$
$R_\odot$	太阳半径	$6.9599(7)\times10^{10}cm$
$L_\odot$	太阳光度	$3.826(8)\times10^{33}erg\cdot s^{-1}$
1eV	1 电子伏	
	与 1 电子伏相当的波长	$12398.520(32)\times10^{-8}cm$
	与 1 电子伏相当的波数	$8065.479(21)cm^{-1}$
	与 1 电子伏相当的频率	$2.4179696(63)\times10^{14}Hz$
	与 1 电子伏相当的能量	$1.6021892(46)\times10^{-12}erg$
	与 1 电子伏相当的温度	$11604.50(36)K$

* 1 erg $=10^{-7}$J.

* * 1 e.s.u.（静电单位）$=0.33\times10^{-9}$C.

* * * 1 dyn $=10^{-5}$N.

第一章　经典辐射理论的简短回顾

等离子体中单个带电粒子的辐射，一般说来，主要有以下几种基本过程：

1. 质点间近碰撞产生的轫致辐射（也称为自由-自由跃迁过程）.

2. 质点在磁场中加速引起的回旋辐射和同步辐射；质点沿弯曲磁力线运动时的曲率辐射.

3. 相对论电子的逆康普顿散射.

4. 质点速度超过介质中光的相速度时引起的切仑柯夫辐射.

5. 原子、分子或离子的跃迁辐射（例如，自由电子跃迁到分立能级，不同能级之间的跃迁等，即通常说的自由-束缚，束缚-束缚过程）.

除了最后一种辐射必须用量子理论处理之外，其他各种过程都有可能根据经典辐射理论做出简单、有效而且最为直观的描述.因此，本书将尽可能根据经典或半经典理论讨论这些过程.

当然，经典理论有一定的适用范围.当粒子位置的不确定性 Δx 显著小于系统的特征尺度 r（这里的特征尺度因具体问题而异，可以是粒子之间的距离，或者是粒子辐射的波长等），即 $\Delta x \ll r$，并且粒子动量的不确定值 Δp 可以和动量值 p 相比较，$\Delta p \lesssim p$，才能有效地利用经典轨道观念描写粒子的行为.把这些条件代人测不准关系 $\Delta x \simeq \frac{h}{\Delta p}$，就得到

$$\lambda = h/p \ll r.$$

该式表示，只有当表征辐射粒子波动性的德布罗意波长比问题中的特征尺度 r 小很多时，经典理论才是适用的.这时可以不考虑微观粒子的波动性，对它采用经典的描述.

但 $\lambda \ll r$ 还不是经典理论适用条件的最通俗直观的表达式，因为德布罗意波长 λ 本身并不是容易测量的量. 经典理论应用条件也可以用粒子能量 W 和它的辐射频率 ν 表示. 以 v 表示粒子速度，则其能量 $W \sim pv$，p 是粒子动量. 而它的辐射频率 $\nu \sim v/r$（例如，带电粒子在其平衡位置附近振动的频率为 ν，振幅 $\sim r$，速度 $\sim v$，这一电谐振子发出的辐射频率也是 ν）. 把这些关系代入前面的不等式，得到

$$h\nu \ll W,$$

即辐射光子能量只能是粒子动能的很小一部分. 如果 $h\nu \simeq W$，就必须用量子理论处理辐射问题.

本章将对经典辐射过程的基本公式做一简短概述和讨论.

§1.1 李纳-维谢尔势

按经典电磁学理论，讨论带电粒子的辐射应从麦克斯韦方程组出发，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \tag{1.1}$$

可以引进矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ 描写场.（$\boldsymbol{A}$，φ）和（$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$）的关系为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{1.2}$$

用（$\boldsymbol{A}$，φ）代替（$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$），则方程组（1.1）简化为

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{1.3}$$

这里的(A,φ)要满足洛伦兹规范条件：

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{1.4}$$

通过直接微商就可证明，方程(1.3)，(1.4)有以下形式的重要特解：

$$\varphi(x,y,z,t) = \iiint_\infty \frac{\rho\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\tau}{r},$$

$$A(x,y,z,t) = \frac{1}{c}\iiint_\infty \frac{j\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\tau}{r}. \tag{1.5}$$

式中，r 代表(ξ,η,ζ)处的小体积元 $d\tau=d\xi d\eta d\zeta$ 到(x,y,z)的距离，$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. 解(1.5)的意义很明显，它表示 t 时刻在观察点(x,y,z)的场 φ 和 A 是由各体元的电荷及电流贡献的，在(ξ,η,ζ)处的体元 $d\tau$ 中的电荷 $\rho d\tau$ 及电流 $jd\tau$ 对 φ，A 的贡献分别为$\frac{\rho d\tau}{r}$及$\frac{jd\tau}{cr}$. 但当我们求 t 时刻 φ 和 A 的值时，上述表示中的 ρ 和 j 应取某个较早时刻 $t'=t-\frac{r}{c}$时的值. 即 $d\tau$ 处的 ρ 和 j 发生变化时，要在$\frac{r}{c}$时间以后才影响(x,y,z)点的 φ 和 A. 由此可见，电磁影响是以有限速度(即真空中的光速 c)传播的. 因此(1.5)式称为推迟势.

从(1.5)式出发，可以讨论单个带电粒子产生的电磁场. 如果粒子线度很小，即 ρ 不为零的区域非常小，(1.5)式中的 r 可以提到积分号外，并用 r' 表示(因为推迟作用，r 不能取 t 时的值，而是某一较早时刻 t' 的值). 因而有

$$\varphi = \frac{\iiint_\infty \rho\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\tau}{r'}.$$

对 $\boldsymbol{A}$ 作同样考虑，若粒子各部分速度相同，则

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{v}'}{cr'}\iiint_{\infty}\rho\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\tau,$$

其中$\boldsymbol{v}'$也是t'时刻的值.但要注意，

$$\iiint_{\infty}\rho\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\tau$$

并不是粒子总电量q.因为该积分是对各处的不同时刻的电荷求和，在粒子运动情况下，积分值一般不等于总电荷q.因此，$\varphi\neq\frac{q}{r'}$，$\boldsymbol{A}\neq\frac{q\boldsymbol{v}'}{cr'}$.但这一积分值可以叫做运动粒子的有效总电量，记为$\tilde{q}$.求出$\tilde{q}$，即得到粒子的场$\boldsymbol{A},\varphi$.

可以证明(推导可以在一般电动力学教程中找到)

$$\tilde{q}=\iiint_{\infty}\rho\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\tau=\frac{q}{1-\frac{v'_r}{c}},$$

式中v'_r表示粒子在t'时刻的速度$\boldsymbol{v}'$在矢径$\boldsymbol{r}'$方向的投影[注意，$\boldsymbol{r}'$是由t'时刻粒子所在点指向观察点(x,y,z)的].一般将$1-\frac{v'_r}{c}$用K表示，即

$$K=1-\frac{v'_r}{c}=1-\frac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{r}'}{cr'}=1-\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{\beta}'$$

$$\left(\text{其中 }\boldsymbol{n}'=\frac{\boldsymbol{r}'}{r'},\boldsymbol{\beta}'=\frac{\boldsymbol{v}'}{c}\right),$$

因此有效电量是

$$\tilde{q}=\iiint_{\infty}\rho\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right)d\tau=q/K.$$

可以把K叫做电量改正因子，它反映当粒子运动时，有效电量的变化.当粒子静止时，$K=1$，$\tilde{q}=q$；当粒子大体上沿着$\boldsymbol{r}'$方向朝着观察点运动时(即$\boldsymbol{v}'$与$\boldsymbol{r}'$夹锐角)，$K<1$，从而$\tilde{q}>q$；当粒子大体上背着$\boldsymbol{r}'$方向运动时($\boldsymbol{v}'$与$\boldsymbol{r}'$夹钝角)，$K>1$，从而$\tilde{q}<q$.可见有效电量的这种随速度的变化和多普勒效应颇为类似，可以叫做电

荷的多普勒效应.

运动粒子有效电量的变化完全符合我们的物理直观，只要举一个极端情况即可想象这种变化；假如粒子以接近光速 c 的高速度朝着观察点运动（即 $|\boldsymbol{\beta}'|\simeq 1, \boldsymbol{\beta}' /\!/ \boldsymbol{r}'$），则粒子将几乎与它产生的场（也以 c 运动）同时到达观察点 (x, y, z). 即粒子运动过程中各个时刻产生的场将几乎同粒子一起到达点 (x, y, z). 因此，对在 (x, y, z) 点的观察者而言，该处电场是由一个沿粒子轨道的长条状的线电荷分布所产生，有效电荷自然大大增加.

求出了 $\tilde{q}$，就得到带电粒子产生的场的表达式为

$$\varphi = \frac{q}{Kr'},$$

$$A = \frac{q\boldsymbol{v}'}{cKr'} = \frac{q\boldsymbol{\beta}'}{Kr'} \tag{1.6}$$

式中 $K = 1 - \frac{v_r'}{c} = 1 - \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{\beta}'$.

(1.6)式称为李纳-维谢尔势，它有两个特点：(1)它考虑了推迟效应，即粒子在 t 时刻在 (x, y, z) 点产生的场是由某一较早时刻 t' 的粒子位置 $\boldsymbol{r}'$ 及速度 $\boldsymbol{v}'$ 决定的. 反映在(1.6)式中，就是式中所有的量如 $r', \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{n}'$ 等都取 t' 时刻的值. (2)考虑了有效电量的改变. 因此在(1.6)式中，用 q/K 代替 q.

许多书上，把李纳-维谢尔势写成

$$\varphi = \left[\frac{q}{Kr}\right]_{推迟},$$

$$A = \left[\frac{q\boldsymbol{\beta}}{Kr}\right]_{推迟},$$

从而可略去"'"号，$[\quad]_{推迟}$表示括号中的量要在 t' 时刻计算.

§1.2 单个粒子的辐射场

有了李纳-维谢尔势，就可由(1.2)式求出单个带电粒子的电磁场 $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ 和 $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$. 计算虽繁，但是初等的（推导略），求出的 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 含许多项. 经过整理，将 $\sim\frac{1}{r}$ 的项与 $\sim\frac{1}{r^2}$ 的项分

别合并，最后结果是

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=q\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{K^3r^2}\right]_{推迟}$$

$$+\frac{q}{c}\left[\frac{\boldsymbol{n}}{K^3r}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}\right]_{推迟},$$

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}. \tag{1.7}$$

这里 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}$ 代表 t' 时刻粒子所在点到观察点 (x,y,z) 方向的单位矢量.

可见，电磁场可分为两项，即 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{B}_2$. $\boldsymbol{E}_1$ 为(1.7)中第一式右方第一项，而 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1$. $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1$ 与粒子加速度无关，在远处以 $\frac{1}{r^2}$ 趋于零. 而 $\boldsymbol{E}_2$ 则与加速度成正比，在远处以 $\frac{1}{r}$ 趋于零.

容易看出，$(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1)$ 对辐射没有贡献，因为能流密度 $\boldsymbol{s}$ 中含 $\boldsymbol{E}_1$ 或 $\boldsymbol{B}_1$ 的项比例于 $\frac{1}{r^3}$ 或 $\frac{1}{r^4}$，所以如以粒子所在点为中心做半径为 r 的球面，通过该面的能流

$$\oint\!\!\!\oint_r \boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\propto\frac{1}{r}\text{ 或 }\frac{1}{r^2}.$$

因此当 $r\longrightarrow\infty$ 时，通过球面的能流 $\longrightarrow 0$，这表示没有能量辐射出去. 实际上，电磁理论已证明，$(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1)$ 是和带电粒子一起移动的场，即所谓“固有场”. 特点是，当粒子静止时，$\beta=0,K=1$，则 $\boldsymbol{E}_1=\frac{q\boldsymbol{n}}{r^2}$，还原为熟知的静电库仑场，$\boldsymbol{E}_1$ 实即粒子的瞬时“库仑场”.

所以，讨论粒子的辐射问题，只须考虑 $(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{B}_2)$ 的贡献. 把 $(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{B}_2)$ 称为粒子的辐射场，改记为 $\boldsymbol{E}_{辐},\boldsymbol{B}_{辐}$，则有

$$\boldsymbol{E}_{辐}=\frac{q}{c}\left[\frac{\boldsymbol{n}}{K^3r}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]_{推迟},$$

$$\boldsymbol{B}_{辐}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{辐}. \tag{1.8}$$

不难看出，$\boldsymbol{E}_{辐},\boldsymbol{B}_{辐},\boldsymbol{r}$（注意 $\boldsymbol{r}$ 是 t' 时刻的值）三者互相垂直，且 $|\boldsymbol{E}_{辐}|=|\boldsymbol{B}_{辐}|$.

对于(1.8)式，可以指出以下两点：

1. 由该式可见，只有在带电粒子做加速运动时($\dot{\beta}\neq 0$)才会产生辐射. 引起粒子加速的可能性很多，大致分为两类：

(1)外场的作用. 在天体物理学中，人们对带电粒子在外磁场中的情况最感兴趣. 已经证实，各类天体大都存在强度不等的磁场；对于脉冲星，磁场强度甚至达 10^{12}Gs①. 带电粒子在磁场中受洛伦兹力作用而得到加速度，从而引起辐射. 这就是下面要说到的回旋辐射和同步辐射. 另一个有兴趣的情况是粒子沿弯曲磁力线飞行时产生的曲率辐射.

(2)碰撞过程. 例如，带电粒子与原子、分子，特别是带电粒子之间的碰撞过程(如电子-离子之间的碰撞)，在库仑力作用下，粒子将会加速，这样产生的辐射叫轫致辐射. 相对论电子和光子的碰撞引起的辐射叫康普顿辐射(或叫逆康普顿散射).

本书大体上将按粒子的加速机制对单粒子的各种辐射过程分类，并分别进行讨论. 应该指出，只是在真空情况下，作加速运动的粒子能产生辐射这一说法才是正确的. 因为在有介质时，粒子即使作匀速运动，只要速度超过介质中光的相速，也能产生辐射，称为切仑柯夫辐射. 等速粒子能产生辐射，似乎与(1.8)式矛盾，但实际上并非如此. 因为这时辐射并不单指等速粒子自己的电磁场，由于粒子的运动会引起介质中其他带电粒子发出次波，辐射就是这些次波与原来的波干涉的结果. 在这种情况下，被加速的是介质中的粒子. 因此，严格来说，切仑柯夫辐射不能算做单粒子的辐射.

2. 由(1.8)式得到的第二个定性认识是，质量小的带电粒子产生的辐射强. 因为在给定外场作用下，小质量的带电粒子必定获得较大的加速度. 另外，小质量粒子可以具有较大的速度值 β. 从而(1.8)式分母的 K 因子有可能很小，使辐射场大为增强. 可以预料，最轻的荷电粒子——电子，其辐射最强. 所以我们将着重讨论电子的辐射. 下面还要对粒子质量与辐射强度的关系作进一步的

① 1Gs≙10^{-4}T

定量说明.

§1.3 单个粒子的辐射功率、辐射角分布及谱分布

(1.8)式只是给出了带电粒子在空间各点的辐射场的场强 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$(以下略去脚标). 但在讨论辐射问题时,感兴趣的是:

1. 粒子在单位时间中辐射的能量(辐射功率).
2. 不同方向的辐射强度(求辐射角分布).
3. 辐射中不同的频率成份的强度(求谱分布).
4. 辐射的偏振情况.

对于各种具体的辐射过程,我们总围绕这四方面展开讨论.

下面将从(1.8)式出发,讨论这些问题.

1.3.1 角分布

由(1.8)式给出的辐射场,可以求出空间各点的辐射场的玻印亭矢量 $\boldsymbol{S}$,确定瞬时能通量. 由于 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{n}$ 三者互相垂直,且成右手螺旋关系,故

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n}.$$

如果在观察点(x,y,z)(见图 1.1),做一小面元 $d\boldsymbol{\sigma}$,其法向沿 $\boldsymbol{S}$ 方向,$d\sigma$ 对 t' 时刻粒子所在点张的立体角为 $d\Omega$,则 $d\boldsymbol{\sigma}=r^2 d\Omega \boldsymbol{n}$,单位时间通过 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的能量为

$$dP(t) = \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n})r^2 d\Omega.$$

因此,每单位立体角辐射的功率是

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n})r^2 = \frac{c}{4\pi}r^2|\boldsymbol{E}|^2. \tag{1.9}$$

但要注意,这里的 $dP(t)$ 的含意为:由于在时刻 t' 电荷的辐射,观察者在 t 时刻所测得的单位时间通过 $d\sigma$ 面的辐射能量. 我们关心的是在电荷处单位时间沿 $d\Omega$ 方向辐射的能量,所以(1.9)式不是准确意义下的角分布,应该改写. 由于 t—$t+dt$ 中观察者在面元 $d\sigma$ 接收的能量 $dP(t)dt$,是电荷在 $t'-t'+dt'$ 中发出的,按能量守

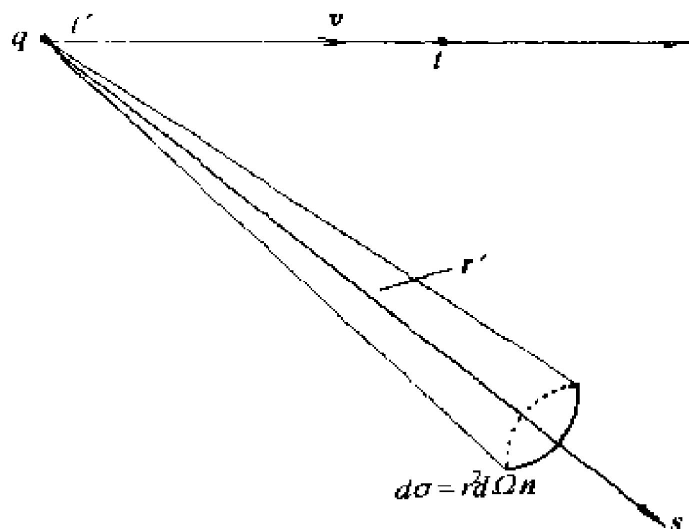


图 1.1

恒，应有

$$dP(t)dt = dP(t')dt',$$

即

$$dP(t') = dP(t)\frac{dt}{dt'}. \tag{1.10}$$

已知

$$t' = t - \frac{r(t')}{c},$$

故

$$dt' = dt - \frac{1}{c}\frac{dr(t')}{dt'}dt' = dt + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(t')\cdot\boldsymbol{n}dt'$$

（由图 1.1 可见，$\boldsymbol{v}(t')\cdot\boldsymbol{n} = v_r(t') = -\frac{dr(t')}{dt'}$），或者

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{v}(t')}{c} = 1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = K. \tag{1.11}$$

将(1.11)式代入(1.10)式得到

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{dP(t)}{d\Omega}\frac{dt}{dt'} = \frac{cK}{4\pi}r^2|\boldsymbol{E}|^2. \tag{1.12}$$

(1.12)式给出了粒子在单位时间中沿给定方向的单位立体角辐射的能量，此即辐射角分布公式.

将(1.8)式代入(1.12)式有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{4\pi c}\frac{|\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}|^2}{K^5}. \tag{1.13}$$

从(1.13)式不容易直接看出粒子辐射角分布特征.以下我们在两个极端情况下讨论辐射角分布的情况.

1. 非相对论极限下(即粒子速度 $v\ll c$).

此时 $\beta\to 0, K\to 1$,因此(1.13)式简化为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{4\pi c}|\boldsymbol{n}\times\{\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}|^2.$$

如果用 θ 表示 $\dot{v}$ 与 n 方向之间夹角,则有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta. \tag{1.14}$$

(1.14)式给出熟知的偶极子辐射的角分布(实际上,$q^2\dot{\boldsymbol{v}}^2=q^2\ddot{r}^2=\ddot{d}^2$,$\ddot{d}$ 就是偶极子 d 对时间的二阶导数).由该式可见,非相对论粒子的辐射角分布有两个特点:一、与速度无关;二、辐射分布在很宽的角范围中(且角分布对加速度方向是对称的,见图 1.2).

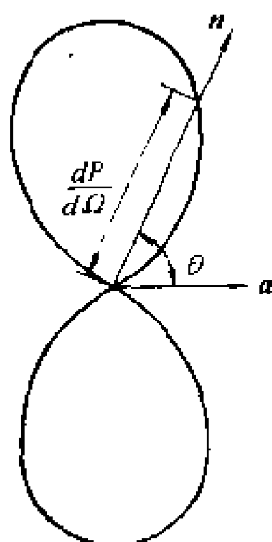


图 1.2

以下将看到,对于相对论性粒子,这两个特征不再存在.

2. 相对论极限下(速度 $v\to c$ 或 $\beta\to 1$).

先做一些定性的分析,从(1.13)式不难看出,相对论速度对角分布的影响主要体现在分母的 K 因子中(粗略地说,分子含 β^2 项,分母含 β^5 项).在 $\beta\to 1$ 的情况下,并且当辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 几乎是沿速度 $\boldsymbol{\beta}$ 方向时,$K\simeq 1-\beta\to 0$,从而 $\frac{dP(t')}{d\Omega}\to\infty$.这表明,对于相对论粒子,辐射将在粒子速度方向上出现尖锐的极大值.从而表明,辐射将有显著的方向性.

不难进一步做些半定量的估计，很容易估算运动方向 $\boldsymbol{\beta}$ 附近辐射显著异于零的角间隔大小. 以 θ 表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 间夹角，则

$$K = 1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta\cos\theta.$$

当 $\theta=0$，有 $K=1-\beta=K_{\min}$，从而辐射 $\left(\propto\frac{1}{K^5}\right)$ 达到极大. 注意现在讨论的是相对论粒子，$\beta\simeq1$，故

$$K_{\min} = 1 - \beta \ll 1.$$

当 θ 为异于零的小角时，$K\simeq1-\beta+\frac{\beta\theta^2}{2}=K_{\min}+\frac{\theta^2}{2}$. 所以，若要求在 θ 角处辐射仍很强，必须相应的 K 值和 $K_{\min}=1-\beta$ 为同级小量，取 $K=2K_{\min}$，对应的 θ 角为

$$\theta \simeq \sqrt{1-\beta^2}.$$

读者不难得到这一关系式，只要注意

$$K \simeq K_{\min} + \frac{\theta^2}{2} = (1-\beta) + \frac{\theta^2}{2},$$

并代入 $K=2K_{\min}$ 即可. 可以把这一特征角 θ 标志的方向看做是还有显著辐射的方向.

习惯上，将 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 记为 γ，亦即洛伦兹因子，γ 的物理意义是代表粒子的能量 $E=mc^2$ 与该粒子静能 m_0c^2 之比.

$$\gamma = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.15}$$

或者说，γ 代表粒子无量纲的能量值，此后本书中将直接称 γ 为粒子的**能量**. 从而

$$\theta \simeq \frac{1}{\gamma}. \tag{1.16}$$

这表明，相对论粒子的辐射主要集中于以速度 $\boldsymbol{\beta}$ 为中心线，半张角为 $\theta\simeq\frac{1}{\gamma}$ 的狭小角锥之中. 粒子"能量"γ 愈大，则张角愈小. 当 $\theta=\frac{1}{\gamma}$ 时，辐射已比极大方向下降了 $1/2^5$.

从(1.16)式可见，对于能量 γ 很大的相对论电子，辐射具有极

为尖锐的方向性. 例如,对于一个 $v\doteq 0.9999995c$ 的极相对论电子,$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\simeq 10^3$. 故由(1.16)式得,$\theta\simeq 0.001\text{rad}\simeq 0.057°$,即其辐射角锥仅及角秒量级.

为了定量说明相对论粒子辐射的角分布具体图形,现在分别求出速度与加速度共线以及两者互相垂直这两个特殊情况下的角分布.

1. $\boldsymbol{\beta}/\!/\dot{\boldsymbol{\beta}}$情况(例如,粒子沿静电场方向运动).

这时(1.13)式化为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{4\pi c}\frac{|\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{K^5}=\frac{q^2}{4\pi c}\frac{\dot{\beta}^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\tag{1.17}$$

所以辐射不再与速度无关. 显而易见,当 $v\ll c(\beta\to 0)$时,(1.17)回到偶极辐射公式(1.14). 而当 β 增加时,偶极分布的两叶逐渐转向前方(即 β 方向). 当 $\beta\to 1$ 时辐射集中在 $\theta\simeq 0$ 的小范围中. 图 1.3 给出 $\beta\ll 1$ 的偶极辐射图形和 $\beta\lesssim 1$ 时的角分布图形以资比较.

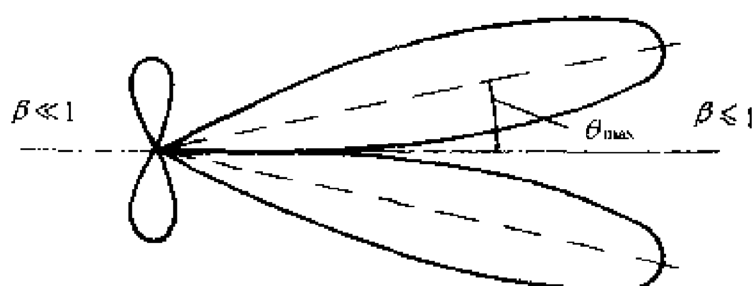


图 1.3

2. $\boldsymbol{\beta}\perp\dot{\boldsymbol{\beta}}$情况(例如,粒子在静磁场中运动).

利用$\boldsymbol{\beta}\perp\dot{\boldsymbol{\beta}}$,(1.13)式化为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{4\pi c}\frac{[(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\dot{\boldsymbol{\beta}}^2-(1-\beta^2)(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}.$$

引出此式时，只需注意条件 $\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}=0$ 以及矢量公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}).$$

若以 θ 表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 夹角，φ 表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 所成平面与 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 之夹角（图 1.4），并注意 $\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}=\dot{\beta}\cos\varphi\sin\theta$，则有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{4\pi c}\frac{\left[(1-\beta\cos\theta)^2\dot{\beta}^2-(1-\beta^2)\dot{\beta}^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\right]}{(1-\beta\cos\theta)^5}.$$

或者，利用(1.15)式，有

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{q^2}{4\pi c}\dot{\beta}^2\left[\frac{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2-\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^5}\right].\quad(1.18)$$

(1.18)和(1.17)式有共同的基本特征，即沿粒子速度方向的辐射($\theta\simeq0$)达到峰值，辐射是向前方的. 图 1.5 表示在磁场中加速的相对论粒子($\dot{\boldsymbol{\beta}}\perp\boldsymbol{\beta}$)的辐射角分布. 图中的螺旋线代表粒子的运动轨道，角分布曲线是在 $\varphi=0$(即辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 在 $\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}}$所在平面内)平面上画出的.

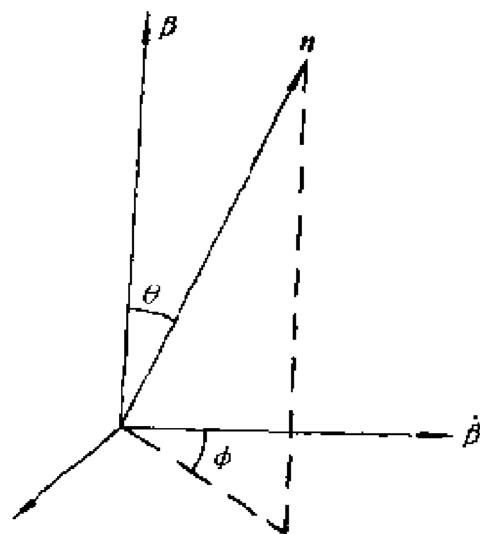


图 1.4

图 1.2 给出的非相对论粒子的角分布和图 1.3 及图 1.5 给出的相对论粒子辐射角分布有很大不同，前者有很宽角范围的辐射，而后者具有显著方向性. 有时把这种方向性叫做相对论粒子辐射的集束效应. 产生这种变化的物理本质是不难理解的，作为“光源”的高速粒子在其运动方向上的辐射将由于多普勒效应而显著增强，而在其它方向，特别是背着速度的方向上辐射剧减. 不过，这里说的“多普勒效应”有两个含意，除了通常所指的关于频率变化的多普勒效应外，更重要的是指

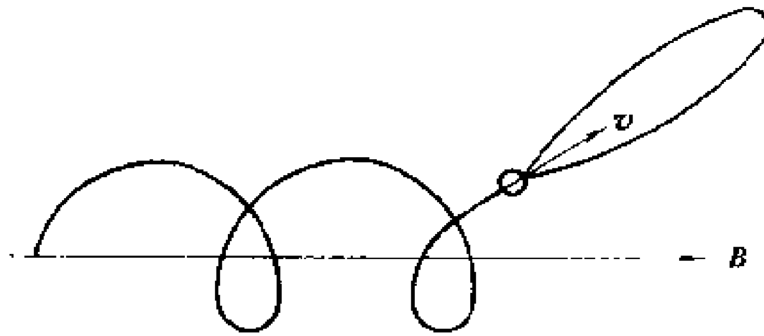


图 1.5

关于粒子有效电量变化的“多普勒效应”.

至于在一般情况下,加速度 $\dot{\beta}$方向任意时,可将 $\dot{\beta}$沿与 β 平行方向及与 β 垂直方向分解. 可以预料,辐射角分布的基本特征,即峰值功率沿速度方向这一点将不会变化.

1.3.2 辐射总功率

有了辐射的角分布公式,原则上就可由对所有方向的立体角的积分

$$P(t') = \int \frac{dP(t')}{d\Omega} d\Omega$$

定出粒子的总辐射功率. 下面仍然就相对论与非相对论两个极限情况分别讨论.

1. 对非相对论粒子.

积分(1.14)式,由于 $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$,得到总功率为

$$P(t') = \frac{dW}{dt'} = \int \frac{q^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta 2\pi\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2q^2\dot{v}^2}{3c^3} = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}, \qquad (1.19)$$

式中 $\ddot{d} = q\dot{v}$ 是粒子偶极矩对时间的二阶导数.

(1.19)式表明,非相对论粒子的总功率和粒子速度无关,只和加速度 $\dot{v}$ 有关.

2. 对于相对论粒子.

直接积分(1.13)式求总功率$P(t')$需要繁复的数学运算. 但是

利用相对论的变换理论，很容易从非相对论情况下的总功率$P(t')$直接导出相对论粒子的辐射功率.

已知$v \ll c$条件下导出的辐射功率公式(1.19)不能应用于$v \simeq c$的相对论粒子，但是若在一个和粒子瞬时相对静止的参考系(粒子参考系$\tilde{s}$)来考查，则相对该参考系而言，粒子就是非相对论的，(1.19)式有效. 即在该参考系$\tilde{s}$中、粒子在$d\tilde{t}$时间中辐射出去的能量为

$$d\widetilde{W} = \frac{2q^2}{3c^3}\tilde{\dot{v}}^2 d\tilde{t}. \tag{1.19'}$$

观察上式，可注意等式两边的$d\widetilde{W}$和$d\tilde{t}$分别和两个相对论中熟知的四度矢量的第四个分量有关，这两个四矢是：动量四矢$P_\mu = m_0 c U_\mu = \left(p_1, p_2, p_3, \frac{iW}{c}\right)$及位置四矢$X_\mu = (x_1, x_2, x_3, ict)$，所以

$$d\widetilde{W} = \frac{c}{i} d\tilde{p}_4, \qquad d\tilde{t} = \frac{d\widetilde{X}_4}{ic}. \tag{1.20}$$

这启发我们，有可能把(1.19′)式改造成四度时空中的协变方程，即当从粒子参考系回到实验室参考系时，形式不变. 由此可以在实验室系s中得到所求的总功率$P = \frac{dW}{dt}$.

首先改写$\frac{2q^2}{3c^3}\tilde{\dot{v}}^2$因子，这需要知道加速度$\tilde{\dot{v}}$和四度加速度矢量$\frac{d\widetilde{U}_\mu}{ds}$的关系，为此，应先求出速度$v$和四速度$U_\mu$的关系. 由于

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

故

$$ds = \frac{cdt}{\gamma},$$

所以四速度为

$$U_\mu = \left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{icdt}{ds}\right)$$
$$= \left(\frac{\gamma}{c}v_1, \frac{\gamma}{c}v_2, \frac{\gamma}{c}v_3, i\gamma\right),$$

其中 $v_i=\frac{dx_i}{dt}$ 为普通速度.

四度加速度矢量当为

$$\frac{dU_\mu}{ds}=\left(\frac{\gamma}{c^2}\frac{d(\gamma v_1)}{dt},\frac{\gamma}{c^2}\frac{d(\gamma v_2)}{dt},\frac{\gamma}{c^2}\frac{d(\gamma v_3)}{dt},\frac{i\gamma}{c}\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

可见,在粒子静止参考系 $\tilde{s}$ 中($\gamma=1$)有

$$\frac{d\tilde{U}_\mu}{ds}=\left(\frac{1}{c^2}\frac{d\tilde{v}_1}{dt},\frac{1}{c^2}\frac{d\tilde{v}_2}{dt},\frac{1}{c^2}\frac{d\tilde{v}_3}{dt},0\right),$$

或

$$\left(\frac{d\tilde{U}_\mu}{ds}\right)^2=\frac{1}{c^4}\dot{\tilde{v}}^2. \tag{1.21}$$

将(1.20),(1.21)代入到(1.19′)式,则有

$$d\tilde{P}_4=\frac{2q^2}{3c}\left(\frac{d\tilde{U}_\mu}{ds}\right)^2 d\tilde{X}_4. \tag{1.22}$$

推广(1.22)式,我们可以写出下列四矢方程

$$d\tilde{P}_\alpha=\frac{2q^2}{3c}\left(\frac{d\tilde{U}_\mu}{ds}\right)^2 d\tilde{X}_\alpha \tag{1.23}$$

$$(\alpha=1,2,3,4),$$

它的第四个分量就是(1.22)或(1.19′)式.

由于(1.23)是协变方程,故从粒子参考系 $\tilde{s}$ 回到实验室系 s 时,形式不变.在实验室系 s 中,写出方程(1.23)的第四个分量,我们有

$$\frac{dP_4}{dX_4}=\frac{1}{c^2}\frac{dW}{dt}=\frac{2q^2}{3c}\left(\frac{dU_\mu}{ds}\right)^2=\frac{2q^2}{3c^3}\gamma^2\left(\frac{dU_\mu}{dt}\right)^2. \tag{1.24}$$

注意,这里的 t,γ 等都已是实验室系中的量.因而在实验室系中,辐射功率为

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{2q^2}{3c}\gamma^2\left(\frac{dU_\mu}{dt}\right)^2. \tag{1.25}$$

为了得到最后结果,应将(1.25)式中的 $\frac{dU_\mu}{dt}$ 换成普通加速度.由于

$$U_\mu = \left(\frac{\gamma}{c}v_1, \frac{\gamma}{c}v_2, \frac{\gamma}{c}v_3, i\gamma\right)$$
$$= (\gamma\beta_1, \gamma\beta_2, \gamma\beta_3, i\gamma),$$

故可导出

$$\left(\frac{dU_\mu}{dt}\right)^2 = \gamma^2\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2\beta^2 + 2\gamma\dot{\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\gamma}^2$$
$$= \gamma^2\dot{\beta}^2 - (1-\beta^2)\dot{\gamma}^2 + 2\gamma\dot{\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}).$$

注意到

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \gamma^3((\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}),$$

因而有

$$\left(\frac{dU_\mu}{dt}\right)^2 = \gamma^2\dot{\beta}^2 + \gamma^4(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2$$
$$= \gamma^4[(1-\beta^2)\dot{\beta}^2 + (\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]$$
$$= \gamma^4[\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2].$$

推导中利用了矢量公式$(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \beta^2\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2$. 最后得到相对论粒子辐射功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{2q^2}{3c}\gamma^6[\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]. \qquad (1.26)$$

当粒子 $v \ll c$ 时，$\beta \simeq 0, \gamma = 1$，(1.26)式就回到了偶极辐射公式(1.19).

从(1.26)式可见，和非相对论情况不同，相对论性粒子辐射总功率和速度有关，速度增大(因而“能量”γ 增大)时，辐射功率剧增. 从粒子辐射场公式(1.8)看出，正是由于电量改正因子 K 的影响，使高速粒子辐射显著增强.

如果不用粒子的加速度 $\dot{\beta}$，而用力来表示总功率，把(1.26)式改写一下，则可以得出一些其他结论. 用力代替(1.26)式中的加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$显然更为简便合理，因为实际问题关心的是一个给定速度 $\boldsymbol{\beta}$ 的粒子在给定外场($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$)中的辐射功率. 此时，粒子受的电磁力很

易写出，但对高速运动粒子，很难由相对论力学方程得出加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 的简单表达式. 为此，最好是从(1.24)式出发，把(1.24)式写成

$$\frac{dW}{dt}=\frac{2cq^2}{3}\left(\frac{dU_\mu}{ds}\right)^2.$$

对于静质量为 m_0 的粒子，其四动量为

$$P_\mu=m_0cU_\mu=\left(p_1,p_2,p_3,\frac{iW}{c}\right),$$

故

$$\frac{dU_\mu}{ds}=\frac{1}{m_0c}\frac{dP_\mu}{ds}.$$

对于该式的三个空间分量，有

$$\frac{dU_i}{ds}=\frac{\gamma}{m_0c^2}\frac{dp_i}{dt}\qquad(i=1,2,3),$$

以及

$$\frac{dU_4}{ds}=\frac{i\gamma}{m_0c^3}\frac{dW}{dt}.$$

已知在给定电磁场中，粒子受洛伦兹力作用(我们已略去较小的辐射阻尼力)，

$$\boldsymbol{f}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}),$$

因此粒子的运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}),$$

以及

$$\frac{dW}{dt}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}=\boldsymbol{v}\cdot q\boldsymbol{E}=cq\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}.$$

将它们代入(1.24)式，就可以把辐射功率和力联系起来，得到

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt}&=\frac{2q^4}{3m_0^2c^3}\gamma^2[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})^2]\\&=\left(\frac{2r_0^2c}{3}\right)\gamma^2[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})^2],\end{aligned}\qquad(1.27)$$

式中 $r_0=\frac{q^2}{m_0c^2}$ 叫做粒子的经典半径. 请读者注意，引出(1.27)式时

是做了近似的.(1.27)式以及它上面的三个式子中,略去了辐射阻尼力的影响.

(1.27)式不再含有加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$,而用场力表示辐射功率.从(1.27)式明显看出:在给定外场($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$)中的粒子,质量越大,则辐射功率越低,功率$\frac{dW}{dt}\propto\frac{1}{m_0^2}$.因而电子的辐射将远远超过质子(即使质子的速度和电子相同).这就是今后我们总是考虑最轻荷电粒子-电子辐射的理由,并用电子电荷 e 代替前面各公式中的 q.

1.3.3 谱分布

前面讨论辐射的角分布,现考虑谱分布,即辐射能量按频率的分布.为此,需要傅氏分析理论.按这一理论,任意形式的波总可以展成傅氏级数或傅氏积分.这在物理上表示,任一个波可以表示成不同频率单色波的叠加.

先对傅氏分析做一简短回顾.假如波场 $E(t)$ 在时间上是周期性的,周期为 T,则可展开成傅氏级数

$$E(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}E_n e^{-in\omega_0 t}\qquad\left(\omega_0=\frac{2\pi}{T}\right),$$

而系数为

$$E_n=\frac{1}{T}\int_0^T E(t)e^{in\omega_0 t}dt.$$

不难看出,

$$E_{-n}=E_n^*.$$

场的平均强度(定义为场强平方在一周期中的平均值)为

$$\overline{E_{(t)}^2}=\frac{1}{T}\int_0^T E^2(t)dt=\sum_{-\infty}^{\infty}|E_n|^2=2\sum_{n=1}^{\infty}|E_n|^2.$$

(由于是辐射场,所以其中不含直流分量$|E_0|^2$.)该式表示平均强度等于各单色分量的强度之和,称为帕塞瓦定理.

假如 $E(t)$ 是非周期性的,则傅氏级数应代以傅氏积分

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)d\omega e^{-i\omega t},$$

式中

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{i\omega t}dt,$$

显然有

$$E(-\omega) = E^*(\omega).$$

此时帕塞瓦定理的形式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t)dt = 4\pi\int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega,$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)d\omega e^{-i\omega t} \\ &=\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty} E^*(t)e^{-i\omega t}dt \\ &=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)E^*(\omega)d\omega \\ &=4\pi\int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}$$

回到谱分布问题：为了得到辐射的谱分布，应该对(1.9)式的角分布$\frac{dP(t)}{d\Omega}$做傅氏分析，求出$\frac{dP(t)}{d\Omega}$在各种单色频率上的傅氏成分. 注意，这里的$\frac{dP(t)}{d\Omega}$是由于t'时刻电子的辐射，观察者在推迟的时刻t收到的讯号，而不是t'时刻电荷处的辐射能量$\frac{dP(t')}{d\Omega}$；因为现在提出的任务是对观察者收到的辐射$\frac{dP(t)}{d\Omega}$做谱分解. 按(1.9)式

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}r^2|\boldsymbol{E}(t)|^2.$$

利用(1.9)式给出的$\frac{dP(t)}{d\Omega}$可以求沿给定方向单位立体角辐射的总能量$\frac{dW}{d\Omega}$的谱分析.

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dP(t)}{d\Omega}dt = \frac{c}{4\pi}r^2\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t)dt.$$

对于$\frac{dW}{d\Omega}$，我们有可能利用傅氏分析中的帕塞瓦定理.

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t)dt = 4\pi\int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega.$$

从而

$$\frac{dW}{d\Omega} = cr^2\int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{dW(\omega)}{d\Omega} d\omega.$$

由此得到单位频率间隔、单位立体角辐射的能量是

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega} = cr^2 |E(\omega)|^2. \tag{1.28}$$

可见，求谱分布的关键是求出场的单色振幅 $E(\omega)$. 由于单色振幅 $E(\omega)$和 $E(t)$的关系为

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \qquad E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt,$$

所以由(1.8)式

$$E(\omega) = \frac{e}{2\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\boldsymbol{n} \times \{(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^3 r}\right]_{推迟} e^{i\omega t} dt.$$

方括号$[\quad]_{推迟}$中的量是在时刻 $t' = t - \frac{r}{c}$ 计算的，而积分是对时间 t 进行的. 为了避免在推迟时间计算括号中的量，可以把积分变数 t 改为 t'. 因为

$$t = t' + \frac{r(t')}{c}, \qquad dt = K dt',$$

所以

$$E(\omega) = \frac{e}{2\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{K^2 r} e^{i\omega(t' + \frac{r}{c})} dt'.$$

由图 1.6 可见，$r \simeq r_0 - \boldsymbol{\rho}(t') \cdot \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{r}_0$ 是观察点的位矢，是常矢量. $\boldsymbol{\rho}(t')$是电子在 t' 时刻的位矢. 故

$$E(\omega) = \frac{e}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{n} \times \{\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^2 r}$$

$$\cdot c^{i\omega\left(t' - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}(t')}{c}\right)} e^{i\omega r_0/c} dt',$$

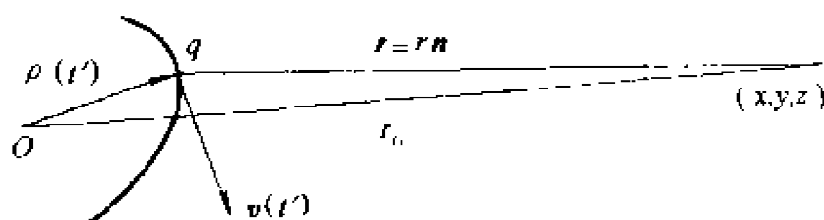


图 1.6

因此

$$|E(\omega)|^2=\frac{e^2}{4\pi^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^2r}\cdot e^{i\omega\left(t'-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}(t')}{c}\right)}dt'\right|^2.$$

由此得到[利用(1.28)式]

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi^2c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\left(t'-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}(t')}{c}\right)}\cdot\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^2}dt'\right|^2. \tag{1.29}$$

利用等式:

$$\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^2}=\frac{d}{dt'}\left(\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})}{K}\right),$$

其中 $K=1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$①,(1.29)式可以化简.

将这一等式代入(1.29)作分部积分,并注意$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt'}=\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{\beta}_{(\infty)}=0$,得到

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\left(t'-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}(t')}{c}\right)}\cdot[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}(t'))]dt'\right|^2. \tag{1.30}$$

(1.30)式即所需要的电子辐射谱公式. 只要知道了电子的运

① 很容易自右向左证明此等式,但需注意:电子所在点到远处观察者的指向 $\boldsymbol{n}$ 实际上几乎不随时间变化,$d\boldsymbol{n}/dt'\simeq0$.

动情况 $\rho=\rho(t')$，原则上即可由该式求出其谱分布.

但是这里要指出，对于非相对论粒子，$v\ll c$，可由其辐射场 $\boldsymbol{E}(t)$ 简便地算出单色振幅 $\boldsymbol{E}(\omega)$，从而谱分布公式有着比(1.30)更简便的形式. 根据辐射场强公式(1.8)，由于 $v\ll c$，因而 $\beta\to 0, K\to 1$. 由此得到

$$E(t)\simeq\frac{e}{c}\left|\left[\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{r}\right]_{推迟}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{d}})}{c^2 r}\right]_{推迟}\right|,$$

式中 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}, \ddot{\boldsymbol{d}}$ 都取 $t'=t-\frac{r}{c}$ 之值，则有

$$E(t)\simeq\frac{\ddot{d}\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta}{c^2 r},$$

式中 θ 表示 $\ddot{\boldsymbol{d}}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 间之夹角，故

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ddot{d}\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta}{c^2 r}e^{i\omega t}dt$$

$$=\frac{\sin\theta}{c^2 r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{d}(t)e^{i\omega(t+\frac{r}{c})}dt$$

$$=\frac{\ddot{d}(\omega)\sin\theta}{c^2 r}\cdot e^{i\omega\frac{r}{c}}.$$

因此，根据(1.28)式，谱分布为

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega}=cr^2|E(\omega)|^2=\frac{\ddot{d}^2(\omega)\sin^2\theta}{c^3}=\frac{\omega^4 d^2(\omega)\sin^2\theta}{c^3}$$

(1.31)

(因为 $\ddot{d}(\omega)=-\omega^2 d(\omega)$).

(1.31)式是偶极矩辐射的谱分布公式，它实际上是普遍的谱分布公式(1.30)的非相对论极限. (1.31)式表示，各个单色成分辐射的强弱取决于该频率的偶极矩分量的大小.

将(1.31)式对全部立体角积分，即可求出偶极辐射在单位频率间隔中辐射的总能量为

$$W(\omega) = \int_0^\pi \frac{dW(\omega)}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2\pi \ \ddot{d}\ (\omega)}{c^3} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{8\pi}{3c^3} \ \ddot{d}^{\,2}(\omega), \tag{1.32}$$

或者

$$W(\omega) = \frac{8\pi}{3c^3}\omega^4 d^2(\omega). \tag{1.33}$$

在此不禁要问：我们是否能和讨论角分布及总功率问题时那样，说明从非相对论粒子过渡到相对论粒子时，谱分布特征将会发生什么样的变化. 从公式(1.30)出发，对此问题很难得出什么一般性结论. 但从直观的定性分析可以看出，由于"多普勒效应"，相对论电子的主要辐射频率(峰频)将远远大于相同力场中的非相对论电子.

普遍的谱公式(1.30)只适用于在真空中电子的辐射. 在实际情况中，也经常处理有介质存在时的问题. 例如，讨论电子在折射率是 n_r 的等离子体中的辐射. 这时辐射谱分布公式需要修改. 但是可以证明，只需将真空情况下的公式(1.30)做一简单的代换，

$$c \to c/n_r, \qquad e \to e/n_r,$$

即可得到适用于介质存在情况下的谱公式：

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2 n_r(\omega)}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \beta) e^{i\omega(t-n_r\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}/c)} dt\right|^2. \tag{1.34}$$

以上两个代换的意义可以这样来理解，即介质对辐射谱的影响来自两方面的原因：一是改变了辐射的相速度，二是介质对辐射电子产生电荷屏蔽作用.

这里需要指出，谱分布公式(1.30)及(1.31)只适用于做非周期性运动的电子. 因为对周期运动的粒子(周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$)，沿单位

立体角辐射总能量$\frac{dW}{d\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dP}{d\Omega}dt=\infty$. 为求周期运动粒子辐射的谱分布，可以对一周期中沿单位立体角辐射的能量做谱分解，即对

$$\frac{dW}{d\Omega}=\int_0^T\frac{dP(t)}{d\Omega}dt=\frac{c}{4\pi}r^2\int_0^T E^2(t)dt$$

做谱分解.

对于周期运动，帕塞瓦定理形式为

$$\frac{1}{T}\int_0^T E^2(t)dt=2\sum_{s=1}^{\infty}|E_s|^2.$$

单色振幅 E_s 和 $E(t)$ 关系为

$$E(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}E_s e^{-is\omega_0 t},\qquad E_s=\frac{1}{T}\int_0^T E(t)e^{is\omega_0 t}dt,$$

式中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$.

利用帕塞瓦定理，得到

$$\frac{1}{T}\frac{dW}{d\Omega}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{T}\frac{dW_s}{d\Omega}=\frac{c}{2\pi}r^2\sum_{s=1}|E_s|^2.$$

由此可见，在一周期时间 T 中，频率为 $\omega_s=s\omega_0$ 的单色波的平均辐射功率为

$$\frac{dP_s}{d\Omega}=\frac{1}{T}\frac{dW_s}{d\Omega}=\frac{c}{2\pi}r^2|E_s|^2.$$

现在的问题是求出$|E_s|$，和前面的讨论类似，我们有

$$\begin{aligned}E_s&=\frac{1}{T}\int_0^T E(t)c^{is\omega_0 t}dt\\&=\frac{e}{Tc}\int_0^T\left[\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^3 r}\right]_{推迟}e^{is\omega_0 t}dt\\&=\frac{e}{Tc}\int_{-\frac{r}{c}}^{T-\frac{r}{c}}\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^2 r}e^{is\omega_0(t'+\frac{r}{c})}dt'\\&=\frac{e}{Tc}\int_0^T\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{K^2 r}\end{aligned}$$

$$\cdot e^{is\omega_0\left(t'-\frac{n\cdot\rho(t')}{c}\right)} e^{is\omega_0\frac{r_0}{c}} dt',$$

从而

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = \frac{cr^2}{2\pi}\frac{e^2}{T^2c^2}\left|\int_0^T \frac{n \times \{(n-\beta)\times\dot{\beta}\}}{K^2 r} \cdot e^{is\omega_0\left(t'-\frac{n\cdot\rho}{c}\right)} dt'\right|^2,$$

代入 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$，最后得到

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = \frac{1}{T}\frac{dW_s}{d\Omega} = \frac{e^2 s^2 \omega_0^4}{8\pi^3 c}\left|\int_0^T e^{is\omega_0\left(t'-\frac{n\cdot\rho}{c}\right)}\right.$$

$$\left.\cdot\left[n\times(n\times\beta(t'))\right]dt'\right|^2. \tag{1.35}$$

(1.35)式就是周期运动粒子的辐射谱公式. 只要知道了周期运动电子的运动方程 $\rho=\rho(t)$ $\left(因而知道\ \beta(t)=\frac{1}{c}\frac{d\rho}{dt}\right)$，就可由(1.35)式求出一周期时间 T 中频率为 $\omega_s=s\omega_0$ 的单色波辐射的平均功率 $\frac{dP_s}{d\Omega}$(沿给定方向单位立体角).

类似于(1.31)式的推导，可以求出一个做周期运动的非相对论电子的谱分布公式

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = \frac{1}{T}\frac{dW_s}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi}r^2|E_s|^2 = \frac{\ddot{d}_s^2\sin^2\theta}{2\pi c^3}. \tag{1.36}$$

由(1.36)式可见，如果偶极子做单色振动，只含一个频率 $\omega_s=s\omega_0$，则其辐射也是单色的，这一单色辐射的强弱由偶极矩 $\ddot{d}_s$ 的大小决定.

§1.4 偏振光的描述:斯托克斯参量

1.4.1 椭圆偏振波

辐射理论中，偏振的讨论也是重要组成部分. 其中最先涉及的问题是，对于一束给定的辐射，引进什么物理量描述其偏振状态最为方便，以及观测上如何确定这几个物理参量.

为此，先讨论最简单的完全偏振光——椭圆偏振光(线偏振光和圆偏振光都是其特例). 图 1.7 表示一椭圆偏振波，由纸内向外

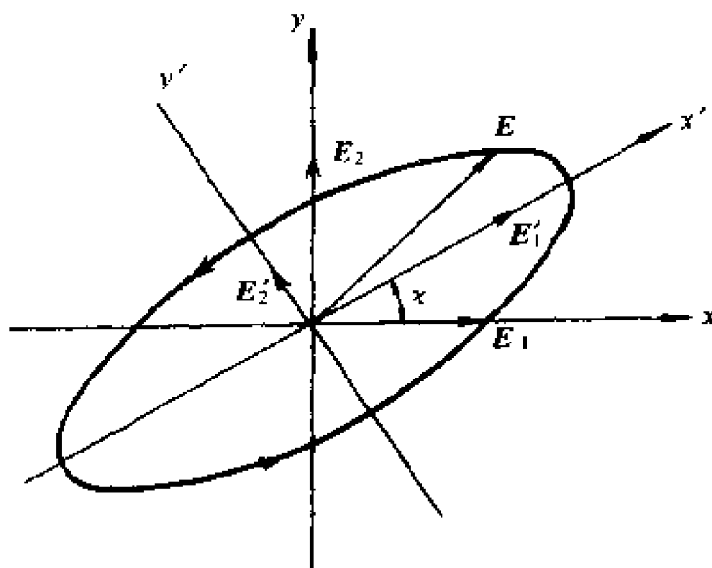


图 1.7

传播.一般说来,该波的瞬时场强 $\boldsymbol{E}$ 总可表为 $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$. 其中场强 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2$ 相互垂直,振动频率 ω 相同,但两者振幅 a_1,a_2,初相 δ_1,δ_2 可以不相同.于是有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$,以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1(t) &= \boldsymbol{e}_1 a_1\cos(\omega t-\delta_1),\\ \boldsymbol{E}_2(t) &= \boldsymbol{e}_2 a_2\cos(\omega t-\delta_2).\end{aligned}\qquad(1.37)$$

(1.37)式是椭圆偏振光的普遍表示.显见,当 $\delta_1=\delta_2$,则(1.37)式表示一线偏振光.如用 θ 记此线偏振光场强 $\boldsymbol{E}$ 与 x 轴方向 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角,则偏振方向角由 $\mathrm{tg}\theta=a_2/a_1$ 给出.另一个特例是当 $a_1=a_2$,且 $\delta=\delta_1-\delta_2=\pm\pi/2$ 时,椭圆偏振光(1.37)成为圆偏振光.当 $\delta_1-\delta_2=-\pi/2$,是左旋圆偏振(正螺旋性);当 $\delta_1-\delta_2=\pi/2$,则为右旋(反螺旋性).

一旦给定 $(a_1,a_2,\delta_1,\delta_2)$,就唯一决定了一支椭圆偏振光,其全部偏振特性也就确定.显然,椭圆偏光的全部偏振特征由强度 $\overline{\mathscr{E}_0^2}=\overline{(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)^2}\equiv I$,方位角 χ,旋向以及长短轴比(扁率)给定.现证明,只要参量 $(a_1,a_2,\delta_1,\delta_2)$ 给定,这些特征就确定了.为此,可做一坐标变换,将图 1.7 中 (x,y) 转一 χ 角,变到新坐标架 (x',y'),则椭圆光亦可沿 (x',y') 做更简单的分解

$$E_1' = \mathscr{E}_0\cos\beta\cos\omega t,$$

$$E_2' = -\mathscr{E}_0\sin\beta\sin\omega t, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{1.38}$$

显见，此时光强 $I \equiv \overline{(\boldsymbol{E}_1'+\boldsymbol{E}_2')^2} = \mathscr{E}_0^2$ 仍如前值. $\mathscr{E}_0 \equiv \sqrt{\overline{(\boldsymbol{E}_1'+\boldsymbol{E}_2')^2}}$ 实为平均场强. 两主轴长度分别是 $\mathscr{E}_0|\cos\beta|$ 以及 $\mathscr{E}_0|\sin\beta|$（读者可由(1.38)式导出 $\frac{E_1'^2}{\mathscr{E}_0^2\cos^2\beta}+\frac{E_2'^2}{\mathscr{E}_0^2\sin^2\beta}=1$）. 式中 β 的正负号也有物理意义. 若 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，则此椭圆偏光为顺时针转动，是右旋波；若 $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，则旋向为逆时针，是左旋波，或正螺旋性波. 可见，参量 β 身兼二任. 既描写扁度，也描写电矢的旋转方向.

既然(1.37)和(1.38)式描写同一椭圆偏光，所以两组参量 $(a_1,a_2,\delta_1,\delta_2)$ 和 $(\chi,\beta,\mathscr{E}_0)$ 必可互相换算. 由图 1.7 可见

$$E_1 = E_1'\cos\chi - E_2'\sin\chi,$$

$$E_2 = E_1'\sin\chi + E_2'\cos\chi,$$

亦即

$$E_1 = \mathscr{E}_0\cos\beta\cos\chi\cos\omega t + \mathscr{E}_0\sin\beta\sin\chi\sin\omega t,$$

$$E_2 = \mathscr{E}_0\cos\beta\sin\chi\cos\omega t - \mathscr{E}_0\sin\beta\cos\chi\sin\omega t. \tag{1.39}$$

比较(1.37)和(1.39)式得到

$$a_1\cos\delta_1 = \mathscr{E}_0\cos\beta\cos\chi,$$

$$a_1\sin\delta_1 = \mathscr{E}_0\sin\beta\sin\chi.$$

$$a_2\cos\delta_2 = \mathscr{E}_0\cos\beta\sin\chi,$$

$$a_2\sin\delta_2 = -\mathscr{E}_0\sin\beta\cos\chi. \tag{1.40}$$

由(1.40)式可见，给定参量 $(a_1,a_2,\delta_1,\delta_2)$ 就唯一定出 $(\mathscr{E}_0,\beta,\chi)$，即完全定出椭圆偏光特性. 遗憾的是，用 $(a_1,a_2,\delta_1,\delta_2)$ 做为偏振参量并不恰当，因为实测中很难直接测定诸如初位相，振幅之类的量. 在光学和无线电实测中，最现实的是测强度. 为了描写偏振特性，最好定义一组新的偏振参量（也是四个）来代替上述 $(a_1,a_2,\delta_1,\delta_2)$. 对这四个新参量，要求它们在描写偏振特性时和 $(a_1,a_2,$

δ_1,δ_2)等效，还要求它们便于实测. 一组具有强度量纲的偏振参量——斯托克斯(Stocks)参量正好满足这两个要求，强度是容易实测的量. 实际上，测量辐射的偏振特性，正是通过测各偏振方向的强度来完成的.

暂时不说引出的理由，而直接写出斯托克斯参量定义：

$$
\begin{aligned}
I &\equiv a_1^2 + a_2^2 = \mathscr{E}_0^2, \\
Q &\equiv a_1^2 - a_2^2, \\
U &\equiv 2a_1a_2\cos(\delta_2 - \delta_1), \\
V &\equiv 2a_1a_2\sin(\delta_2 - \delta_1).
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

由定义可见，四参量(I,Q,U,V)皆为强度量纲①，便于实测，定出(I,Q,U,V)后，即可由(1.41)式解出($a_1,a_2,\delta_1,\delta_2$)，完全定出偏振特性($\mathscr{E}_0,\beta,\chi$). 为此，只需将上式和(1.40)式联立即可. 求出

$$\mathscr{E}_0 = \sqrt{I}\,,\ \sin 2\beta = V/I,\ \mathrm{tg}2\chi = U/Q \tag{1.42}$$

由该式可见，I 直接代表椭圆偏光强度，V 决定 β 数值，即决定椭圆偏光的旋转方向和长短轴比. 而 U,Q 则关系着椭圆偏光的长轴方位 χ. 由(1.41)式还可看出，对于完全偏振光，(I,Q,U,V)四量不独立，满足

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \tag{1.43}$$

当然，知道了椭圆偏振光的全部偏振性质($\mathscr{E}_0,\beta,\chi$)，也可反解出斯托克斯参量(I,Q,U,V). 已知($\mathscr{E}_0,\beta,\chi$)，求(I,Q,U,V)的最方便的方法自然是联立(1.40)和(1.41)式，即得(请读者自己做)：

$$
\begin{aligned}
&I = \mathscr{E}_0^2,\ Q = I\cos 2\beta\cos 2\chi, \\
&U = I\cos 2\beta\sin 2\chi,\ V = I\sin 2\beta.
\end{aligned}
\tag{1.42'}
$$

因此，求一束偏振光的偏振状态，归结为如何由强度测定四参

① 有的作者将能流$\frac{c}{4\pi}[\xi_0]^2$定义为强度. 从本书第二章起，将采用不同于(1.41)式中第一式的强度定义，但这些不同的强度定义都正比于振辐平方，彼此只是常系数和量纲不同.

量(I,Q,U,V). 以下讨论这四参量的实测办法,顺便也就了解其定义是如何引出的. 测量偏振的实际过程不过就是测定强度 I 作为方向角 ψ 和一个任意固定相移 η 的函数关系. η 是由人为引进的相移器产生的在垂直于光传播方向的平面上场强的两个互相垂直分量 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2$ 之间的一个附加相位差(熟悉光学的读者可以举出产生相移的例子,如 1/2 波片,1/4 波片,巴俾涅补偿器等). 因此,在测量方向强度 $I=I(\psi,\eta)$时,需要一个线偏器再加一个相移器,光学中最简单的线偏器自然就是偏振片.

实测了方向强度 $I(\psi,\eta)$,即可定出斯托克斯参量(I,Q,U,V). 以下推导一公式,建立 $I(\psi,\eta)$和(I,Q,U,V)关系. 并由此自然明白四参量定义(1.41)式是怎么引出的.

由(1.37)式可知,对给定的椭圆偏振光,重要的只是两束光的相位差 $\delta_2-\delta_1$,而非初相 δ_2,δ_1 本身,其实,δ_1,δ_2 的数值取决于计时原点 $t=0$ 的选择,调整计时原点,(1.37)式简化为

$$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_1a_1\cos\omega t+\boldsymbol{e}_2a_2\cos[\omega t+(\delta_2-\delta_1)],$$

记 $\delta_2-\delta_1\equiv\delta$,并使第二分振动 $\boldsymbol{E}_2$ 人工附加一相移 η,则

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_1a_1\cos\omega t+\boldsymbol{e}_2a_2\cos[\omega t+\delta+\eta]. \tag{1.44}$$

该振动在某一方向,例如在与 y 轴成 ψ 角方向上的投影是(见图 1.7. 请读者在图上补一条过原点并与 y 轴夹 ψ 角的直线).

$$\begin{aligned}&a_1\cos\omega t\sin\psi+a_2\cos(\omega t+\delta+\eta)\cos\psi\\&=[a_1\sin\psi+a_2\cos\psi\cos(\delta+\eta)]\cos\omega t\\&\quad-a_2\cos\psi\sin(\delta+\eta)\sin\omega t.\end{aligned}$$

将此方向上的振动求平方,再对时间求平均,即得该方位 ψ 的平均光强 $I(\psi,\eta)$:

$$\begin{aligned}I(\psi,\eta)=&\overline{a_1^2}\sin^2\psi+\overline{a_2^2}\cos^2\psi\\&+\{2\,\overline{[a_1a_2\cos\delta]}\cos\eta-2\,\overline{[a_1a_2\sin\delta]}\sin\eta\}\sin\psi\cos\psi,\end{aligned}$$

但
$$2a_1a_2\cos\delta\equiv U,\quad 2a_1a_2\sin\delta\equiv V$$

以及

$$I_1=a_1^2=\frac{1}{2}(I+Q),\quad I_2=a_2^2=\frac{1}{2}(I-Q)$$

(参见(1.41)式). 因此得到

$$I(\psi,\eta)=\frac{1}{2}[I+Q\cos2\psi+(U\cos\eta-V\sin\eta)\sin2\psi]. \tag{1.45}$$

只要测定了不同方位 ψ(至少需 4 个 ψ 方位)上的方向强度 $I(\psi,\eta)$,即可由上式定出斯托克斯参量(I,Q,U,V)值,从而定出$(\mathscr{E}_0,\beta,\chi)$,确定偏振状态,从(1.45)式推导可见,参量$(I,Q,U,V)$是作为方向强度 $I(\psi,\eta)$公式中的系数而自然引进的. 从(1.45)式亦可见到,利用相移器引入不为零的 η 实在必要,否则无法实测 V 值,也就不能定偏振光旋向和长短轴比了.

附带指出,上面是从(1.37)式出发引出斯托克斯参量的,即假定了一个理想的椭圆偏振波,其振幅 a_1,a_2 及初相 δ_1,δ_2 都是恒定的,但实际情况并不这样简单. 以单色波情况为例,即使相当数目的振动次数中维持了振幅和相位的恒定,但它们在一秒之内也会发生上万次变化. 不过,虽然振幅和相位快速变化着,但必须使其分振幅之比 a_1/a_2 以及相位差 $\delta_2-\delta_1$ 保持绝对恒定,否则不成其为椭圆偏振波. 对于这种实际的椭圆偏振波,(1.41)式定义的斯托克斯参量可以理解为时间平均量,即

$$\begin{aligned}
I&\equiv\overline{a_1^2}+\overline{a_2^2}=I_1+I_2=\mathscr{E}_0^2,\\
Q&\equiv\overline{a_1^2}-\overline{a_2^2}=I_1-I_2,\\
U&\equiv2\,\overline{a_1a_2}\,\overline{\cos(\delta_2-\delta_1)}=2\,\overline{a_1a_2\cos\delta},\\
V&\equiv2\,\overline{a_1a_2}\,\overline{\sin(\delta_2-\delta_1)}=2\,\overline{a_1a_2\sin\delta}.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

1.4.2 任意偏振波的斯托克斯参量

对于任意偏振波(可以是部分偏振波,也可以是完全非偏振的自然波),其瞬时振动仍可用(1.37)式表示. 但不同点是,现在振幅 a_1,a_2 及相位 δ_1,δ_2 是不规则变化的,而且比值 a_1/a_2 及相差 $\delta_2-\delta_1$ 也都不一定是时间恒量,但显然仍可导出方向强度 $I(\psi,\eta)$公式(1.45),即仍有

$$I(\psi,\eta)=\frac{1}{2}[I+Q\cos 2\psi+(U\cos\eta-V\sin\eta)\sin 2\psi],$$

其中(I,Q,U,V)是任意偏振波的斯托克斯参量,定义如前(1.46)式(是时间平均值).实测了$I(\psi,\eta)$,即可定出偏振参量(I,Q,U,V).

注意在(1.45)式中,(I,Q,U,V)四量皆线性出现于公式中.因此,若辐射束是几支独立波的混合,彼此不相干,即无固定相位关系,则混合波的斯托克斯参量将等于各独立波束相应的参量之和:

$$I=\sum_n I^{(n)},\qquad I_1=\sum_n I_1^{(n)},\qquad I_2=\sum_n I_2^{(n)},$$

$$Q=\sum_n Q^{(n)},\qquad U=\sum_n U^{(n)},\qquad V=\sum_n V^{(n)}.\quad(1.47)$$

另外,由(1.45)式及(1.47)式可以看出,任何实际测量都无法区分由相同斯托克斯参量表示的两束波.无法判定给定(I,Q,U,V)参量的一束辐射波到底由几支独立波混合而成,其中各支波本身的偏振状态又是怎样的.用(I,Q,U,V)描写偏振的这种不确定性反到给我们带来一些方便——可以对任意偏振波做人为的分解.

举完全非偏振波——自然波为例说明波的分解.对于自然波,显见实测的方向强度$I(\psi,\eta)$不依赖于方向ψ和给定的相移η,因此,从(1.45)式可见,对自然光应有

$$Q=U=V=0,$$

以及

$$I(\psi,\eta)=\frac{1}{2}I\qquad(\text{和}\ \psi,\eta\ \text{无关}).\qquad(1.48)$$

(1.48)式即自然波的解析表示.显然,两束独立的椭圆偏振波(完全偏振波)有可能合成自然波,只要这两束波强度相同,扁率相同,但旋向相反且两者长轴互相垂直,如图1.8所示.对于这样两束椭圆偏振波,第一束偏振特性参量若记为$(\mathscr{E}_0,\chi_1,\beta_1)$,第二束为$(\mathscr{E}_0,\chi_2,\beta_2)$,则应有$\beta_1=-\beta_2$,$|\chi_1-\chi_2|=90°$,按(1.47)式和(1.42′)

式，其合成波的斯托克斯参量当为

$$Q = Q_1 + Q_2 = \mathscr{E}_0^2(\cos 2\beta_1 \cos 2\chi_1 + \cos 2\beta_2 \cos 2\chi_2) = 0,$$

$$U = U_1 + U_2 = \mathscr{E}_0^2(\cos 2\beta_1 \sin 2\chi_1 + \cos 2\beta_2 \sin 2\chi_2) = 0,$$

$$V = V_1 + V_2 = \mathscr{E}_0^2(\sin 2\beta_1 + \sin 2\beta_2) = 0,$$

即合成波必为自然波.

类似可证，任意的部分偏振波可表为两束强度不等的，相反偏振波的混合（长轴互相垂直，旋向相反但椭率相同）。部分偏振波的另一常用分解方法，是表为一个无偏振的自然波和一个椭圆偏振波的混合，这在下一节予以说明.

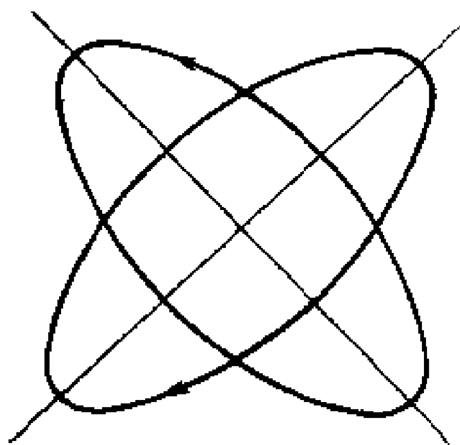


图 1.8

1.4.3 偏振度

可以用斯托克斯参量表示任意偏振波的偏振度. 为此先来证明，任意一个偏振波总可分解为一个自然波和一个椭圆偏振波（完全偏振波）. 已经知道，对于椭圆偏波，四个偏振参量并不独立，按(1.43)式：

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2, \tag{1.43}$$

但此等式对任意偏振光并不总成立. 例如，对于自然光（完全非偏振光），(1.48)式表明，尽管 $I \neq 0$，但 $U = V = Q = 0$. 一般说来，(I, Q, U, V) 四量之间的普遍关系是

$$I^2 \geqslant Q^2 + U^2 + V^2, \tag{1.49}$$

其中等式是否成立正是辐射是否为完全偏振波的判据.

按斯托克斯参量的相加性,对于一个由(I,Q,U,V)描写的任意偏振波,可以看做是两束具有不同斯托克斯参量的独立波的混合,例如

$$[I-(Q^2+U^2+V^2)^{1/2},\ 0,\ 0,\ 0],$$

以及

$$[(Q^2+U^2+V^2)^{1/2},\ Q,\ U,\ V]. \tag{1.50}$$

显见其中第一组参量表示一个完全非偏振的自然波,第二组恰为完全偏振波——椭圆偏振波.由此可见,量$(Q^2+U^2+V^2)^{1/2}$就是任意偏振波中完全偏振部分的强度I_e,所以,可以把任意偏振波的偏振度Π定义为偏振部分的强度与总强度之比:

$$\Pi=\frac{(Q^2+U^2+V^2)^{1/2}}{I}. \tag{1.51}$$

对于椭圆偏振波,由于(1.49)式中等号成立,故$\Pi=100\%$,对于自然波,$Q=U=V=0$,故$\Pi=0$.其它任意偏振波,Π在0与1之间.

按(1.42)式,椭圆偏振波成分的偏振面方位由

$$\mathrm{tg}2\chi=U/Q \tag{1.42}$$

给出,显然它也就是原波束的偏振面取向.

如果理解了参量Q,U,V的意义,还可以用斯托克斯参量表示任意偏振波的线偏振度Π_L和圆偏振度Π_c.为此,再写出椭圆偏振成分的等式(1.43):

$$I_e^2=Q^2+U^2+V^2.$$

椭圆偏振波的两个极端情况是线偏振波和圆偏振波.对于线偏振波,由于$\delta_2=\delta_1$,故由(1.41)式可知,此时$V=0$,从而线偏振波的强度是

$$I_l^2=Q^2+U^2.$$

对于圆偏振波,由于$a_1=a_2,\delta_2-\delta_1=\pm\frac{\pi}{2}$,故由(1.41)式定义可知,此时$Q=U=0$,从而圆偏振波的强度是

$$I_c^2 = V^2.$$

可见，对于由(I,Q,U,V)描写的任意偏振波，可以看做是三组不同的斯托克斯参量表示的独立波的混合，即

$$[I-\sqrt{Q^2+U^2}-V,\ 0,\ 0,\ 0],$$
$$[\sqrt{Q^2+U^2},\ Q,\ U,\ 0],$$
$$[V,0,0,V].$$

三者相加，得到原波的$[I,Q,U,V]$. 其中第一组表示无偏振的自然波，第二组显然表示线偏振波，第三组表示圆偏振波. 因此可以把原始波束的线偏振度Π_L定义为线偏振波成分的强度$\sqrt{Q^2+U^2}$与总强度I之比：

$$\Pi_L = \frac{\sqrt{Q^2+U^2}}{I}. \tag{1.52}$$

其圆偏振度Π_c可以类似地定义为

$$\Pi_c = V/I. \tag{1.53}$$

归纳起来，任意偏振波的强度I，总偏振度Π，线偏振度Π_L，圆偏振度Π_c，偏振面方位角χ，以及其中椭圆偏振波成分的椭率β与斯托克斯参量的关系是

$$\begin{gathered}
I = I,\\
\Pi = \frac{(Q^2+U^2+V^2)^{1/2}}{I},\\
\Pi_L = \frac{(Q^2+U^2)^{1/2}}{I},\\
\Pi_c = V/I,\\
\mathrm{tg}2\chi = U/Q,\\
\sin 2\beta = \frac{V}{(Q^2+U^2+V^2)^{1/2}}.
\end{gathered} \tag{1.54}$$

1.4.4 坐标转动下斯托克斯参量的变换

在引进斯托克斯参量(1.41)式时，事先固定了直角坐标系(x,y)，这样四参量才有定义和确定值. 如果坐标系转过角度ϕ，则

参量跟着改变数值.下面导出新老斯托克斯参量的变换定律,为简单,只求椭圆偏振波的参量变换即可.可以证明,任意偏振波总可表为两个独立的相反椭圆偏振波的合成.如果这两个相反波强度相等,就合成自然波.

在推导变换公式之前,先由$[I,Q,U,V]$的定义(1.41)式引出四参量的另一个用(β,χ)表示的式子,由前面(1.40)式易得

$$a_1=\mathscr{E}_0(\cos^2\beta\cos^2\chi+\sin^2\beta\sin^2\chi)^{1/2},$$

$$a_2=\mathscr{E}_0(\cos^2\beta\sin^2\chi+\sin^2\beta\cos^2\chi)^{1/2},$$

$$\mathrm{tg}\delta_1=\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\chi,\ \mathrm{tg}\delta_2=-\mathrm{tg}\beta\mathrm{ctg}\chi. \tag{1.55}$$

将该式代入参量定义式(1.41),可得

$$I\equiv\overline{a_1^2}+\overline{a_2^2}=I_1+I_2,$$

$$Q\equiv\overline{a_1^2}-\overline{a_2^2}=I_1-I_2=I\cos2\beta\cos2\chi.$$

将此Q值代入前面(1.42)式,即得

$$U=Q\mathrm{tg}2\chi=I\cos2\beta\sin2\chi.$$

又由(1.42)式得

$$V=I\sin2\beta.$$

因此,斯托克斯四参量可用(I,β,χ)重新表示为

$$I=I_1+I_2,$$

$$Q=I\cos2\beta\cos2\chi,$$

$$U=I\cos2\beta\sin2\chi,$$

$$V=I\sin2\beta. \tag{1.56}$$

(1.56)式用来求斯托克斯参量的变换最为方便.假定老坐标系(x,y)转过φ角,则椭圆长轴和新的x'轴夹角为$\chi-\varphi$.按(1.56)式,在转动下,总强度I和参量V是转动不变量,而Q,U随坐标系转动而改变,新的Q',U'为

$$Q'=I\cos2\beta\cos2(\chi-\varphi),\qquad U'=I\cos2\beta\sin2(\chi-\varphi),$$

或者,

$$Q'=Q\cos2\varphi+U\sin2\varphi,\qquad U'=-Q\sin2\varphi+U\cos2\varphi. \tag{1.57}$$

不过，在讨论参量变换时，经常用斯托克斯参量的另一种定义(I_1, I_2, U, V)代替老参量(I, Q, U, V). 其中，$I_1 = \overline{a_1^2} = \frac{1}{2}(I+Q)$，$I_2 = \overline{a_2^2} = \frac{1}{2}(I-Q)$.

按(1.57)式和I, V不变性，立刻得到

$$\begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi, & \sin^2\varphi, & \frac{1}{2}\sin 2\varphi, & 0 \\ \sin^2\varphi, & \cos^2\varphi, & -\frac{1}{2}\sin 2\varphi, & 0 \\ -\sin 2\varphi, & \sin 2\varphi, & \cos 2\varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U \\ V \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

可见，形式上可以把四参量(I_1, I_2, U, V)看作四矢量$\boldsymbol{I}$. 在坐标转动下，四矢量$\boldsymbol{I}$通过线性变换$L(\varphi)$变成新矢量$I' = (I'_1, I'_2, U', V')$. 由变换矩阵$L(\varphi)$形式可见，它对参量$V$是可约的.

§1.5　法拉第磁光效应

天体物理学中，线偏振的电磁波在有磁场$\boldsymbol{B}$存在的等离子体-磁等离子体中传播时所发生的偏振面旋转现象有着重要的意义. 这一现象即为熟知的法拉第磁光效应. 这一效应常被用来解释偏振面旋转现象和估计磁等离子体的一些重要的物理参量，如磁场$\boldsymbol{B}$和电子密度n_e等.

1.5.1　磁等离子体中电磁波的传播特性

已经知道，在法拉第磁光效应中，产生偏振面旋转的物理原因是构成线偏振波的两个同频率、等振幅的左旋和右旋圆偏振波具有不同的相速度. 为此，在讨论法拉第磁光效应之前，先扼要介绍磁等离子体中电磁波传播的一些基本特性. 这里只给出结论，不予推导.

由于磁场$\boldsymbol{B}$的存在，将造成磁等离子体中的空间各向异性，

其折射率 n_r 将不仅随电磁波频率 ω 而改变，也随传播方向 θ 而改变，$n_r=n_r(\omega,\theta)$，θ 代表波传播方向与磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向之间夹角. 并且在给定了 (θ,ω) 后，n_r 有两个值，说明沿给定方向 θ 传播的波有两种波型（或称模式）. 这两个折射率可以写成

$$n_{\mathrm{O,X}}^2=1-\frac{2V(1-V)}{2(1-V)-U\sin^2\theta\pm[U^2\sin^4\theta+4U(1-V)^2\cos^2\theta]^{1/2}},\tag{1.59}$$

其中

$$V=\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2,\qquad U=\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2,$$

$$\omega_p=\sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m_0}}\simeq 5.64\times 10^4\sqrt{N_e}$$

是等离子体频率，$\omega_L=\dfrac{eB}{m_0c}$ 是拉摩频率（电子在磁场中的回旋频率），θ 是传播方向 $\boldsymbol{k}$ 与外磁场 $\boldsymbol{B}$ 间夹角. n_{O} 代表寻常波折射率，在公式右方的分母中取正号；n_{X} 表示非常波折射率，对应于分母中的负号.

当磁场 $\boldsymbol{B}=0$ 时，(1.59) 式化为

$$n_{\mathrm{O}}^2=n_{\mathrm{X}}^2=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

即还原为通常的等离子体折射率公式，折射率与方向 θ 无关，并且只有一个波型.

只当 $\boldsymbol{B}\neq 0$ 时才出现空间各向异性，且沿给定方向 θ，$n_{\mathrm{O}}\neq n_{\mathrm{X}}$. 为了说明这两波型的特征，现考虑 $\theta=0$ 的特殊情况，即波传播方向平行于磁场 $\boldsymbol{k}/\!/\boldsymbol{B}$）.（由 1.59）式可见，此时

$$n_{\mathrm{O,X}}^2=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega\pm\omega_L)}.\tag{1.60}$$

由于一般说来，$\omega_L\ll\omega$，所以实际上 n_{O} 与 n_{X} 相差甚微.

可以证明，上式中 n_{O} 对应的寻常波（O 波）是右旋圆偏振波（即对着波传播方向 $\boldsymbol{k}$ 看过去，电矢 $\boldsymbol{E}$ 是顺时针转动的）. 与 n_{X} 对应的非常波（X 波）则是左旋圆偏振波. 这两个模式的波都沿磁场

方向传播，但相速不同.

另一个特殊情况是传播方向垂直于磁场($\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{B}$)，$\theta=\frac{\pi}{2}$，这时(1.59)式可以简化成

$$n_{\mathrm{O}}^2 = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2},$$

$$n_{\mathrm{X}}^2 = 1 - \left[\frac{\omega_P^2(\omega^2-\omega_P^2)}{\omega^2(\omega^2-\omega_P^2-\omega_L^2)}\right]. \tag{1.61}$$

可以证明，这时的寻常波是偏振方向平行于外磁场 $\boldsymbol{B}$ 的线偏振波，由(1.61)式可见，其波速和磁场 $\boldsymbol{B}$ 大小无关(实际上，电矢 $\boldsymbol{E}$ 方向平行于磁场的情况可以和带电粒子沿磁场运动情况作类比；在后一情况下，粒子运动同样不受磁场影响). 而非常波也是线偏振波，但其偏振方向垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$，且其相速与 $\boldsymbol{B}$ 大小有关.

对于任意方向 θ 传播的辐射波，若只考虑实际感兴趣的高频波，即 $\omega\gg\omega_L$，并且满足条件

$$1-\frac{\omega_P^2}{\omega_2}\gg\frac{\omega_L\sin^2\theta}{\omega\cos\theta} \tag{1.62}$$

时，则(1.59)式化为

$$n_{\mathrm{O,X}}^2 = 1 - \left[\frac{\omega_P^2}{\omega(\omega\pm\omega_L')}\right], \tag{1.63}$$

其中 $\omega_L'=\omega_L\cos\theta$.

比较(1.63)与(1.60)式可见，沿任一 θ 方向的频率足够高的电磁波，其传播模式与沿磁场方向的传播($\boldsymbol{k}/\!/\boldsymbol{B}$)非常类似，只是(1.60)中的拉摩频率 ω_L 要代换成 ω_L'，$\omega_L\to\omega_L'$. 因此，在条件(1.62)下得到的(1.63)式常称为类纵近似. 在类纵近似下，任意传播方向上也有两个模式，与 n_{O} 对应的是右旋波，与 n_{X} 对应的仍是左旋波.

1.5.2 法拉第磁光效应

由于沿同一方向传播的左旋波和右旋波具有不同的相速度，$n_{\mathrm{O}}\neq n_{\mathrm{X}}$，这将引起磁等离子体中线偏振波偏振面的旋转，即法拉第

效应. 已知沿直线的简谐振动总可分解为两个同频率同振幅但旋转方向相反的圆周运动，故线偏振波应为同频率同振幅的右旋波和左旋波之和. 图 1.9(a)和(b)分别表示由于左旋和右旋波相速不同引起的线偏振波偏振面旋转效应. 图 1.9(a)表示任取的 $r=0$ 一点的偏振情况，左旋波和右旋波的振幅矢量分别记为 $\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$，旋转角速正是该点线偏振的电矢 $\boldsymbol{E}$ 的振动频率 ω. 在 $t=0$ 时刻，$\boldsymbol{E}_L$，$\boldsymbol{E}_R$ 重合于 OO' 方向，则 t 时刻 $\boldsymbol{E}_L$，$\boldsymbol{E}_R$，分别向左和向右转过角度 ωt[见图 1.9(a)]，但合矢量 $\boldsymbol{E}$ 方向仍沿 OO'，所以 OO' 就是该点偏振方向，这说明 $\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$ 果然能合成一个沿一定方向的线偏振波. 再看沿波传播方向上离该点距离是 r 的另一点的偏振情况[图 1.9(b)]. 在同一时刻 t，$\boldsymbol{E}_L$ 向左转过的角度是 $\omega\left(t-\frac{n_X r}{c}\right)$，而 $\boldsymbol{E}_R$ 向右转角则是 $\omega\left(t-\frac{n_O r}{c}\right)$. 由于两者相速不同($n_O>n_X$)，$\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$ 有不同转角，所以该点的合振动矢量 $\boldsymbol{E}(r,t)$ 方向(即该点的偏

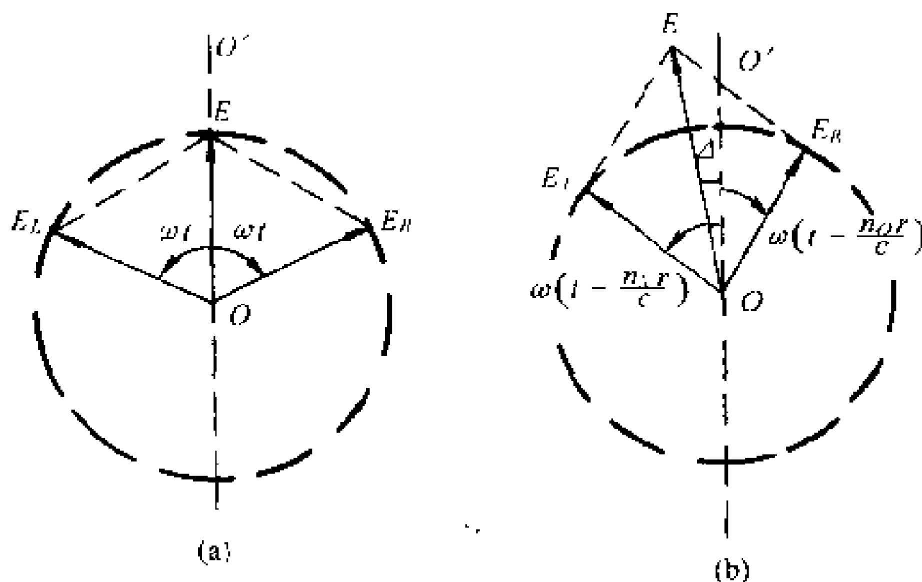


图 1.9

(a)$r=0$ 处 t 时刻偏振方向，(b)距离 r 处 t 时刻偏振方向

振方向)不再沿 OO'. 亦即传播了距离 r 以后,$\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$ 合成的线偏振波发生了偏振面向 OO' 左方的偏转,且容易求出这一偏转角 Δ 的大小. 因为 t 时刻距离 r 处 $\boldsymbol{E}_R$、$\boldsymbol{E}_L$ 之夹角为 $2\omega t-\frac{\omega}{c}\times(n_O+n_X)r$,所以合矢量 $\boldsymbol{E}(t,r)=\boldsymbol{E}_R+\boldsymbol{E}_L$ 与 $\boldsymbol{E}_L(t,r)$ 之夹角是 $\omega t-\frac{\omega}{2c}(n_O+n_X)r$[参见图 1.9(b)]. 但 $\boldsymbol{E}_L(r,t)$ 对 $r=0$ 处偏振方向 OO' 的偏角是 $\omega\left(t-\frac{n_X r}{c}\right)$,故距离 r 处合振动矢 $\boldsymbol{E}(t,r)$ 对 OO' 的偏角为

$$\Delta=\omega\left(t-\frac{n_X r}{c}\right)-\left[\omega t-\frac{\omega}{2c}(n_O+n_X)r\right]$$

$$=\frac{\omega}{2c}(n_O-n_X)r.$$

将(1.63)式中的 n_O、n_X 值代入上式,注意到 $\omega\gg\omega_P$,及 $\omega\gg\omega_L$,得到

$$\Delta=\omega_P^2\omega_L r\cos\theta/2\omega^2c=2.4\times10^4 n_e Br\cos\theta/\nu^2(\mathrm{rad}) \tag{1.64}$$

所以偏振面的旋转角和等离子体电子密度 n_e,磁场 B,传播距离 r 以及传播方向与磁场方向夹角的余弦成正比,且与偏振波的波长 λ 的平方成正比. 偏角 Δ 与波长 λ 的关系常称为旋光色散.

一般情况下,磁场强度 $\boldsymbol{B}$,电子密度 n_e,夹角 θ 等参量沿视线方向不是恒定值,所以(1.64)式中的 $n_e Br\cos\theta$ 应该用积分 $\int n_e B\cos\theta dr$ 代换. 如果将式中的频率 ν 换成以 m 为单位的波长,$\nu\to\lambda(\mathrm{m})$,距离 r 采用pc 为单位,则(1.64)式改写为

$$\Delta=(8.1\times10^5\int n_e B\cos\theta dr)\lambda^2=R_m\lambda^2, \tag{1.65}$$

R_m 称为转动量度. 式中波长 λ 以 m 为单位.

参 考 文 献

[1] Bekefi, G., Radiation Processes in Plasmas, Wiley, New York, 1966.

[2] Chandrasekhar, S., Radiative Transfer, Dover, New York, 1960.

[3] Gardner, F. and Whiteoak, J., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, 4, 245, 1966.

[4] Ginzburg,V.,The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas,Pergamon London,1964.(有中译本)
[5] Ginzburg,V. and Syrovatskii,S.,The Origin of Cosmic Ray,Pergamon,London,1964.
[6] Ginzburg,V. and Syrovatskii,S.,*Ann. Rev. Astro. Ap.*,7,375,1969.
[7] Jackson,J.,Classical Electrodynamics,Wiley,New York,1962.(有中译本)
[8] Landau,L. and Lifshitz,I.,Electrodynamics of Contineous Media,Wesley,Mass Addison. 1960.(有中译本)
[9] Landau,L. and Lifshitz,I.,The Classical Theory of Fields. Wesley,Mass Addison,1962.(有中译本)
[10] Longair,M. S.,High Energy Astrophysics,Cambridge,1992.
[11] Ribicki,G. B. and Lightman,A. P.,Radiation Processes in Astrophysics,Wiley Interscience,1979.
[12] Frank H. Shu,The Physics of Astrophysics,Volume I:Radiation,University Science Books,Mill Valley,California,1992.
[13] Tucker,W.,Radiation Processes in Astrophysics,MIT Prees,Cambridge,Mass.,1976.

第二章　半经典的量子辐射理论概要

经典辐射理论只适用于光子能量远小于辐射粒子动能的情况，但事实上许多辐射过程并不满足条件 $h\nu \ll E$，其中一个熟悉的例子就是原子辐射可见光谱线. 原子中电子的轨道速度量级为 $v \sim 10^8 \mathrm{cm/s}$，相应的能量 $E \sim 10\mathrm{eV}$，而可见光及紫外线光子的能量为 $h\nu \sim 1$—$10\mathrm{eV}$，两者可作比较，即 $E \sim h\nu$. 对于这类辐射，必须用量子理论探讨. 辐射的严格量子理论属于量子电动力学的内容，这已超出本书的范围，但好在天体物理中涉及到的大多数辐射现象都可用半经典的量子辐射理论予以处理. 这种理论的基本特点是：只考虑带电粒子运动的量子化，而辐射场则仍当作经典电磁场处理，不进行量子化. 考虑到后面几章的需要，本章有选择地对半经典理论作一简要复述.

§2.1　黑体辐射，爱因斯坦辐射系数

半经典量子辐射理论的基本精神很不同于经典辐射理论，不是先求辐射场各点场强($\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$)而是将辐射看做带电粒子的能级跃迁过程. 为求辐射的基本问题，如功率，角分布，谱分布，偏振等，核心问题即求量子态之间跃迁概率.

在量子观念基础上的初步辐射理论是爱因斯坦建立的，并由此成功地导出黑体辐射的普朗克公式. 他当初引进的一些基本概念(如自发辐射、感应辐射、跃迁概率等)，至今仍是讨论辐射现象必不可少的，所以有必要作一介绍.

设体系(例如一个原子)有两个态，分别用 m 和 n 来标记，并假定能量 $E_m > E_n$. 处在高能态的原子一般是不稳定的，有向低能级自发跃迁的倾向. 当体系从高能态 m 跃迁到低能态 n 时，将辐

射频率 $\nu=\frac{E_m-E_n}{h}$ 的光子.假定在某次跃迁中，产生的光子沿某一方向的立体角元 $d\Omega$ 中传播，则每秒沿立体角 $d\Omega$ 发出频率为 $\nu_{mn}=\frac{E_m-E_n}{h}$ 的光子的跃迁概率为

$$dp_s = a_{mn}\frac{d\Omega}{4\pi}, \tag{2.1}$$

该概率称为自发跃迁概率，a_{mn} 是自发辐射系数.

如果原子周围还有辐射场存在，则辐射有可能被吸收，从低能态 n 跃迁到高能态 m，一秒内这种跃迁概率用 dp_a 表示.但辐射场也可能促使原来就在高能态 m 上的原子受到扰动而跳回低能态 n 上，一秒内这种感应辐射概率用 dp_i 表示.这两种概率都和入射的辐射流强度成正比.这两个过程和经典电磁理论中的振子情况类似.电谐振子在外场作用下，既可能辐射，也可能吸收外场能量.这取决于振子的振动相位和光波相位之间的关系.

如果辐射场沿 $d\Omega$ 方向的，频率范围是 $\nu-\nu+d\nu$ 的强度用 $I_\nu(\Omega)$ 表示[$I_\nu(\Omega)$ 定义为单位时间沿给定方向单位立体角穿过垂直于辐射方向的单位面积的辐射能量，详见第三章]，则有

$$\begin{aligned} dp_a &= b_{nm}I_\nu(\Omega)\frac{d\Omega}{4\pi}, \\ dp_i &= b_{mn}I_\nu(\Omega)\frac{d\Omega}{4\pi}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

b_{nm} 和 b_{mn} 分别称为原子的感应吸收系数和感应辐射系数.

原则上这三个爱因斯坦系数应该用量子力学方法进行计算，但是出自于热力学方法的考虑，可以得出这三个系数之间的一些普遍关系.

设单位体积中处在激发能级 E_m 上的原子数是 N_m，能级 E_n 上的原子数是 N_n，则显然一秒内发射的能量是 $h\nu_{mn}=E_m-E_n$ 的光子数目是

$$N_m(a_{mn}+b_{mn}I_\nu(\Omega))\frac{d\Omega}{4\pi},$$

而吸收的光子数是

$$N_n b_{nm} I_\nu(\Omega)\,\frac{d\Omega}{4\pi}.$$

如果系统处于热平衡条件下，则吸收数应等于发射数，即

$$N_m(a_{mn} + b_{mn} I_\nu(\Omega)) = N_n b_{nm} I_\nu(\Omega).$$

已知热平衡条件下，在各能级上原子的相对数目是由玻耳兹曼公式给出的，即

$$\frac{N_n}{N_m} = \left(\frac{g_n}{g_m}\right)\exp\left(\frac{E_m - E_n}{kT}\right),$$

其中 g_m, g_n 分别是原子能级 E_m 和 E_n 的统计权重. 因此，

$$b_{nm} I_\nu(\Omega) = \frac{g_m}{g_n}(a_{mn} + b_{mn} I_\nu(\Omega))\exp\left(-\frac{E_m - E_n}{kT}\right). \quad (2.3)$$

应该指出，读者常有一个误解，认为(2.1)及(2.2)式表示的概率是原子从能级 E_m 跃迁到能级 E_n 的总概率（对于 dp_a，则认为是 $E_n \to E_m$ 的总概率）. 其实不然，从(2.3)式的引出可见，(2.1)式中的 dp_s 代表的是原子从 E_m 能级上的某一个量子态跃迁到能级 E_n 的所有量子态的自发跃迁概率. 对于(2.2)式中的 dp_t 也应作类似的理解. 同样，dp_a 代表从 E_n 的某一量子态到 E_m 的所有态的感应吸收概率. 理由是：在建立(2.3)式时，N_m 和 N_n 分别是能级 E_m 和 E_n 的总原子数密度，而能级 E_m 上的每个原子总是处在属于该能级的某一个量子态上的. 对每个完成 $E_m \to E_n$ 跃迁而辐射光子 $h\nu_{mn}$ 的原子，要考虑它从 E_m 的某一个态到 E_n 的所有态的跃迁可能性.

现回到(2.3)式，注意热平衡辐射场的强度 $I_\nu(\Omega)$ 是与温度有关的，$I_\nu(\Omega) = I_\nu(\Omega, T)$，并且当 $T \to \infty$ 时，$I_\nu(\Omega, T) \to \infty$. 利用这一性质，可以从(2.3)式得出第一个重要关系，

$$b_{nm} = \frac{g_m}{g_n} b_{mn}, \quad (2.4)$$

将它代回(2.3)式，得到平衡的强度为

$$I_\nu(\Omega, T) = \left(\frac{a_{mn}}{b_{mn}}\right)\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}. \quad (2.5)$$

为了确定 a_{mn} 和 b_{mn} 的关系，可以利用量子公式(2.5)的经典极

限形式——瑞利-金斯公式，

$$I_\nu(\Omega,T) = 2kT\nu^2/c^2. \tag{2.6}$$

在 $kT \gg h\nu$ 时，对(2.5)式中因子 $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$ 作展开，则(2.5)式近似化为

$$I_\nu(\Omega,T) = \frac{a_{mn}}{b_{mn}}\frac{kT}{h\nu}. \tag{2.5'}$$

比较(2.5′)和(2.6)式，得到第二个重要关系

$$a_{mn} = \frac{2h\nu^3}{c^2}b_{mn}. \tag{2.7}$$

(2.4)和(2.7)式说明，三个爱因斯坦系数 a_{mn}, b_{mn}, b_{nm} 中，只有一个是独立的. 只要根据量子力学计算出其中任一个，例如 b_{mn}，就可立即得到另外两个.

把(2.7)代回(2.5)式，就得到热平衡的辐射强度为

$$I_\nu^{eq} = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}, \tag{2.8}$$

这就是普朗克黑体辐射公式. 尽管本书以讨论带电粒子非热辐射为主，但(2.8)式给出的热平衡辐射仍不失其天体物理应用的重要性，太阳光球的连续谱辐射，致密天体(白矮星，中子星，黑洞)周围吸积盘表面的辐射，强磁中子星磁极处形成吸积柱，当处于稳态吸积时，由柱侧表面发出的 X 射线流都是黑体辐射的典型例子.

根据(2.8)可知，对于给定温度 T 的黑体辐射谱，峰值频率(即与辐射极大相对应的频率值)为

$$\nu_m = 5.88 \times 10^{10}T \quad (\mathrm{Hz}), \tag{2.9}$$

黑体辐射的平均频率是

$$\bar{\nu} = 7.97 \times 10^{10}T \quad (\mathrm{Hz}), \tag{2.10}$$

如果用波长代替频率，则普朗克公式形式为

$$B(\lambda)d\lambda = \frac{2hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{e^{hc/kT\lambda}-1}. \tag{2.11}$$

与辐射极大相应的波长为

$$\lambda_m = 2.90 \times 10^7/T \quad (\text{Å}), \tag{2.12}$$

黑体辐射的积分强度是

$$I^{eq}=\int_0^\infty B(\nu)d\nu=\left(\frac{2k^4T^4}{h^3c^2}\right)\int_0^\infty x^3(e^x-1)^{-1}dx.$$

完成积分，得到

$$I^{eq}=\frac{\sigma}{\pi}T^4\quad(\mathrm{erg\cdot s^{-1}\cdot cm^{-2}\cdot sr^{-1}}).\tag{2.13}$$

其中

$$\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15h^3c^2}=5.67\times10^{-5}\quad(\mathrm{erg\cdot s^{-1}\cdot cm^{-2}\cdot K^{-4}}).$$

由(2.13)式求得黑体辐射的通量(即单位时间通过黑体表面单位面积的辐射流，详见第三章)为

$$F=\pi I^{eq}=\sigma T^4\quad(\mathrm{erg\cdot s^{-1}\cdot cm^{-2}}).\tag{2.14}$$

由以上可见，黑体辐射，即热平衡辐射，其基本特征，诸如谱形，总能量，峰值频率等，完全由一个温度参量 T 决定. 当然实际的辐射体，其温度 T 可能会有一个确定的分布范围，从面其黑体辐射谱形也远比(2.8)式复杂.

以上热平衡辐射只是天体辐射的一种形式，很多天体则具有非热辐射特征. 热平衡辐射的严格定义如下：若辐射系统(光源)中，一切种类的粒子(电子，质子，离子…，特别是也包括光子)是处于同一温度 T 描写的热平衡状态中，简言之，辐射系统是热平衡的，温度为 T，则由该辐射源表面出射的辐射为热平衡辐射，否则是非热平衡辐射.

§2.2 亮温度 T_B 与天线温度 T_A

2.2.1 亮温度 T_B

普朗克公式(2.8)只适用于热平衡辐射(第三章将进一步指出，若要得到普朗克谱形(2.8)式，不仅要求介质热平衡，还要求介质光深 $\tau_\nu\gg1$，即介质还必须是光学厚的)，而在天体物理学中，相当多情况下出现非热辐射(例如，同步辐射，逆康普顿散射，星际分子脉泽，切仑柯夫辐射等)，这类辐射不具有普朗克谱形(2.8)式，

并且常常是各向异性的. 但是天体物理学家常常把这类辐射折算成一定温度下的热平衡辐射，以便于比较. 如果沿某一方向 $\boldsymbol{n}$ 上某一给定频率的非热辐射的强度 $I_\nu(\boldsymbol{n})$ 和某一温度 T_B 下由普朗克公式(2.8)算出的热平衡辐射强度 I_ν^{eq} 相等，即 $I_\nu(\boldsymbol{n})=I_\nu^{eq}$，则该温度值 T_B 就定义为这个非热辐射场的亮温度. 在经典极限下，$h\nu\ll kT$，因此 $I_\nu^{eq}\simeq 2kT_B\nu^2/c^2$，则亮温度由下式给出：

$$kT_B = c^2 I_\nu(\boldsymbol{n})/2\nu^2. \tag{2.15}$$

亮温度是射电天文学中常见的术语，通常用亮温度等效地表示一个非热射电源在某一频率位置处的强度.

2.2.2 天线温度 T_A

若某一射电源亮温度是 T_B，则其辐射强度由(2.15)式给出，即

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2}kT_B.$$

但射电望远镜天线实测的强度一般不是源的真实强度 I_ν，因而测到的温度不是真实的 T_B，理由如下：

假如一个射电源，它在垂直视线方向上的投影面积是 A，强度是 I_ν，则它在立体角 $\Delta\omega$ 中的辐射功率是 $AI_\nu\Delta\omega\Delta\nu$，其中 $\Delta\nu$ 是带宽. 假如射电望远镜天线的接收面积是 a，它到源的距离是 D，则天线面积 a 对源点张的立体角是

$$\Delta\omega = a/D^2,$$

因而天线收到的功率 $P_\nu\Delta_\nu$ 是

$$P_\nu\Delta\nu = AI_\nu\Delta\nu a/D^2 = aI_\nu\Delta\nu\Delta\Omega_s,$$

式中 $\Delta\Omega_s=A/D^2$ 是源对观测者张的立体角.

但是，由于衍射效应的存在，实际天线角分辨率是有限大的. 这使实际天线张有一个固定的立体角 $\Delta\Omega_A$. 在 $\Delta\Omega_A$ 范围以内，天线具有均匀响应，对 $\Delta\Omega_A$ 以内的天体是无法分辨的(即使是一个张角 $\Delta\Omega_s$ 极小的点源，看起来也像一个充满立体角 $\Delta\Omega_A$ 的展源). 因而，当 $\Delta\Omega_s<\Delta\Omega_A$ 时，辐射源对地面观测者所张的表观立体角并

不是 $\Delta\Omega_s$，而是 $\Delta\Omega_A$（同样，源的表观面积不是 A，而是 $\Delta\Omega_A \cdot D^2$），结果造成射电源表观强度的减小. 把天线测得的表观强度记做 I'_ν，则天线收到的功率又可以写为

$$P_\nu\Delta\nu = aI'_\nu\Delta\nu\Delta\Omega_A.$$

比较以上关于 $P_\nu\Delta\nu$ 的两个式子，得到表观强度为

$$I'_\nu = I_\nu \frac{\Delta\Omega_s}{\Delta\Omega_A} \quad (\text{当 } \Delta\Omega_s < \Delta\Omega_A).$$

对于一个扩展的射电源，如果 $\Delta\Omega_s \geqslant \Delta\Omega_A$，则表观强度就是源的真实强度.

$$I'_\nu = I_\nu \quad (\text{当 } \Delta\Omega_s \geqslant \Delta\Omega_A).$$

既然天线测到的表观强度 I'_ν 一般不同于源的真实强度 I_ν，故天线测量的表观亮温度（记为 T_A）也不同于源的亮温度 T_B.

$$T_A = T_B \frac{\Delta\Omega_s}{\Delta\Omega_A} \quad (\text{当 } \Delta\Omega_s < \Delta\Omega_A),$$
$$T_A \simeq T_B \quad (\text{当 } \Delta\Omega_s \geqslant \Delta\Omega_A). \tag{2.16}$$

通常把天线测得的表观亮温度，即(2.16)式中的 T_A，称做天线温度，以区别于源的真实亮温度 T_B. 当 $\Delta\Omega_s < \Delta\Omega_A$ 时，天线温度 T_A 等于源的亮温 T_B 乘以一个稀释因子 $\Delta\Omega_s/\Delta\Omega_A$（图 2.1）.

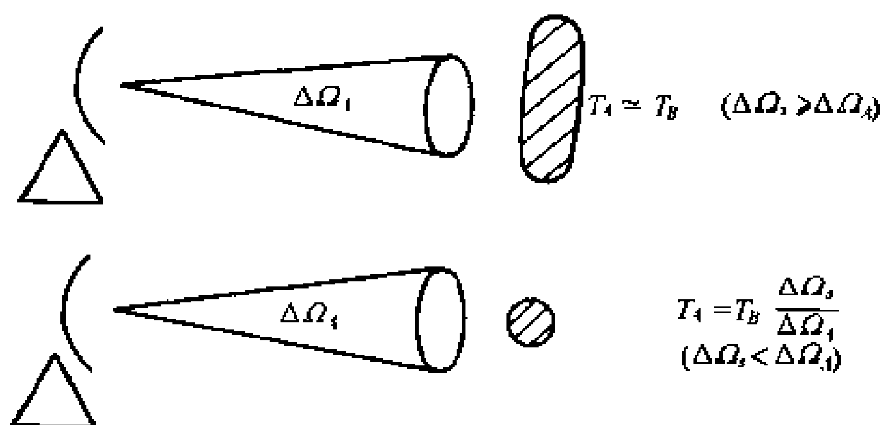


图 2.1

§2.3 含时微扰论，跃迁概率

现在回到量子辐射理论的基本问题，即量子跃迁概率的计算. 尽管(2.4)和(2.7)式给出了三种系数的确定关系，从而简化了三种跃迁概率的计算. 但最后定出这些概率仍需借助量子力学. 事实上，计算从一个量子态到另一个量子态的跃迁概率是量子力学的主要任务之一. 这三种系数中，似乎最自然地会想到先求自发系数，但这在经典量子力学中是不可能完成的，故改求受迫跃迁系数，因为在外来电磁波扰动下的受迫跃迁可以用经典量子力学中的含时微扰方法计算.

如果原子体系不存在微扰时的总能算符记为 $\hat{H}(x)$，

$$\hat{H}^0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V,$$

而将含时间的微扰部分记为 $\hat{H}'(x,t)$，这时的薛定谔方程可写成

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\hat{H}^0(x) + \hat{H}'(x,t))\psi.$$

显然，由此解出的波函数 $\psi(x)$ 将随时间 t 变化，暗示着系统由一个定态到另一个定态跃迁的可能性.

上式可用熟知的微扰论方法求解. 首先，将待求的波函数 $\psi(x,t)$ 用 $\hat{H}^0(x)$ 的本征函数系 $u_K(x)$ 作展开，

$$\psi(x,t) = \sum_K a_K(t)u_K(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_K t}, \qquad (2.17)$$

其中 u_K 是能量本征值为 E_K 的定态波函数，$\{u_K(x)\}$ 构成一组正交完备系. 定出(2.17)中各本征态的振幅 $a_K(t)$，也就求得波函数. 从(2.17)式已看出，t 时刻体系已不处于某一确定的定态上. 因为 $\psi(x,t)$ 已表示为各个定态波函数的线性组合. 在此不难看出 $a_K(t)$ 的意义，为此，用

$$\psi^*(x,t)\hat{H}^0 = \sum_K a_K^*(t)u_K^*(x)e^{\frac{i}{\hbar}E_K t}\hat{H}^0$$

乘(2.17)式，并完成对空间的积分，得到

$$\overline{\hat{H}^0} = \int \psi^* \hat{H}^0 \psi d\tau = \sum_K |a_k(t)|^2 E_K.$$

上式左方是能量平均值，可见$|a_K(t)|^2 = a_K(t)a_K^*(t)$代表体系在$t$时刻处在能量为$E_K$的本征态$u_K(x)$的概率. 如果$t=0$时刻体系处于定态$u_i(x)$，则$t$时刻处于$u_k(x)$态的概率$|a_K(t)|^2$也就是这段时间$t$中体系由$u_i(x)$态跃迁到$u_K(x)$态的跃迁概率.

为了求得各振幅系数，将(2.17)式代入薛定谔方程式，并乘以$u_f^*(x)e^{i\frac{E_f}{\hbar}t}$后，再对$x$积分，由于函数系$u_K(x)$的正交性，就有

$$i\hbar \frac{da_f(t)}{dt} = \sum_K H'_{fK}(t) e^{i\omega_{fK}t} \quad K(t), \qquad (2.18)$$

$$f = 1, 2, 3\cdots.$$

其中$\omega_{fK} = \dfrac{E_f - E_K}{\hbar}$，而$H'_{fK}(t) = \int u_f^*(x) \hat{H}'(x,t) u_K(x) d\tau$是微扰算符矩阵元. (2.18)式实际上是"$E$"表象中的薛定谔方程.

因此，求跃迁概率的问题可归结为对于给定的初条件

$$a_K(0) = \delta_{Ki} \begin{cases} 0 & \text{当} K \neq i \\ 1 & \text{当} K = i \end{cases}$$

求解方程(2.18)，定出振幅$a_f(t)$. 按照熟知的微扰论方法，只要微扰$\hat{H}'(x,t)$足够小，就可在振幅$a_K(t)$的级数展开中，只保留前两项，即零级项和一级项，

$$a_K(t) = a_K^0(t) + a_K^1(t) + \cdots\cdots,$$

代入(2.18)式，得到

$$i\hbar \frac{da_f^0}{dt} + i\hbar \frac{da_f^1}{dt} = \sum_K (a_K^0 + a_K^1) H'_{fK} e^{i\omega_{fK}t}. \qquad (2.19)$$

由于右方不含零级项，因此零级近似的方程为

$$\frac{da_f^0}{dt} = 0.$$

由初条件$a_K(0) = \delta_{Ki}$，得到零级近似解是

$$a_f^0(t) = \delta_{fi} \qquad (f = 1, 2, 3, \cdots\cdots).$$

将此零级解代回(2.19)式，略去二级项，得到关于一级项a_f^1的方

程，

$$i\hbar\frac{da_f^1}{dt}=\sum_K a_K^0 H'_{fK}(t)e^{i\omega_{fK}t}=\sum_K\delta_{Ki}H'_{fK}(t)e^{i\omega_{fK}t}$$
$$=H'_{fi}(t)e^{i\omega_{fi}t}.$$

由此得到

$$a_f^1(t)=\frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{fi}t'}H'_{fi}(t')dt'.$$

因此，方程(2.19)的准确到一级的解为

$$a_f(t)=a_f^0+a_f^1=\delta_{fi}+\frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{fi}t'}H'_{fi}(t')dt'.\quad(2.20)$$

如果微扰$\hat{H}'(x,t)$只作用一段有限长时间T，在$t<0$及$t>T$时微扰为零，则$t\geqslant T$后振幅的形式为(对于$f\neq i$)

$$a_f=\frac{1}{i\hbar}\int_0^T e^{i\omega_{fi}t'}H'_{fi}(t')dt'=\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_{fi}t'}H'_{fi}(t')dt'.$$

(2.21)

(2.21)式可进一步简化，因为上式中的积分值$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_{fi}t'}H'_{fi}(t')dt'$恰为$2\pi H'_{fi}(\omega_{fi})$(请读者回忆傅氏积分公式，对任一个函数$f(t)$，有$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)d\omega e^{-i\omega t}$，其中单色傅氏系数$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{+i\omega t}dt$. 对比(2.21)式，式中的$H'_{fi}(t)$即相当于$f(t)$). (2.21)式成为

$$a_f=\frac{2\pi}{i\hbar}H'(\omega_{fi})_{fi}.$$

因此，在$t\geqslant T$以后，体系由i态到f态的跃迁概率为

$$G_{if}=|a_f|^2=\frac{4\pi^2}{\hbar^2}|H'(\omega_{fi})_{fi}|^2.\quad(2.22)$$

可以从物理上说明(2.22)式的意义. 即为什么在0到t这段时间中，体系由u_i到u_f的跃迁概率$|a_f|^2$会是由$H'_{fi}(\omega_{if})$决定的. 事实上，矩阵元

$$H'_{fi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_f^*\hat{H}'(x,t)u_i d\tau$$

是 t 时刻微扰矩阵元，可以把它理解为 i,f 两态之间的“平均微扰能量”，再把它展成傅氏积分：

$$H'_{fi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H'_{fi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

则其中傅氏单色振幅 $H'_{fi}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H'_{fi}(t) e^{i\omega t} dt$ 表示在“平均微扰能”$H'_{fi}(t)$ 中频率是 ω 的单色成分的微扰能的大小. 因此，从(2.22)式可见，跃迁具有共振性质，即仅当微扰谱里含有频率 $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$ 的单色成分时，原子体系从 E_i 跃迁到 E_f 才是可能的.

§2.4 辐射场和原子体系相互作用微扰算符

现在把(2.22)式具体应用来讨论辐射场中原子的吸收和辐射问题. 计算原子从一个量子态到另一个态的跃迁概率. 由(2.22)可见，首先要知道的是受外场作用的原子的微扰算符 $\hat{H}(x,t)$ 的具体形式. 为此，需要导出计及电磁场和电子相互作用的薛定谔方程.

现已知道，电荷为 $-e$ 的电子在外场 $(\boldsymbol{A},\varphi)$ 中的经典运动方程可以由以下哈密顿函数导出：

$$H(x,t) = \frac{1}{2m_0}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - e\varphi,$$

其中 $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$ 是广义动量，注意它并不等于电子动量 $m_0\boldsymbol{v}$. 现将上式中的 $\boldsymbol{p} \to \hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$ ，则求得相应的哈密顿算符是

$$\hat{H}(x,t) = \frac{1}{2m_0}\left(\hat{\boldsymbol{p}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - e\varphi.$$

对于原子中电子，除外场给于电子的电磁力之外，原子核还给于电子库仑力，库仑势用 $V(x)$ 表示，则

$$\hat{H}(x,t) = \frac{1}{2m_0}\left(\hat{\boldsymbol{p}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - e\varphi + V,$$

其中

$$\left(\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2=\left(\hat{p}_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2+\left(\hat{p}_y+\frac{e}{c}A_y\right)^2$$
$$+\left(\hat{p}_z+\frac{e}{c}A_z\right)^2,$$

按算符的乘法定义，有

$$\left(\hat{p}_x+\frac{e}{c}A_x\right)^2=\left(\hat{p}_x+\frac{e}{c}A_x\right)\left(\hat{p}_x+\frac{e}{c}A_x\right)$$
$$=\hat{p}_x^2+\frac{e}{c}\hat{p}_xA_x+\frac{e}{c}A_x\hat{p}_x+\frac{e^2}{c^2}A_x^2.$$

按照算符代数

$$A_x\hat{p}_x-\hat{p}_xA_x=i\hbar\frac{\partial A_x}{\partial x},$$

或者

$$\hat{p}_xA_x=-i\hbar\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\hat{p}_x,$$

则有

$$\left(\hat{p}_x+\frac{e}{c}A_x\right)^2=\hat{p}_x^2+\frac{2e}{c}A_x\hat{p}_x-\frac{i\hbar e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{e^2}{c^2}A_x^2,$$

于是得到

$$\hat{H}(x,t)=\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m_0}+\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}-\frac{i\hbar e}{2m_0c}\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$
$$+\frac{e^2}{2m_0c^2}\boldsymbol{A}^2-e\varphi+V.$$

因此，辐射场中原子的哈密顿算符可以写为

$$\hat{H}(x,t)=\hat{H}^0(x)+\hat{H}'(x,t),$$

其中

$$\hat{H}^0(x)=\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m_0}+V(x)$$

是未受辐射场扰动的原子体系的哈密顿量，第二项是

$$\hat{H}'(x,t)=\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}-\frac{ie\hbar}{2m_0c}\nabla\cdot A+\frac{e^2}{2m_0c^2}\boldsymbol{A}^2-e\varphi,$$

此即外辐射场与原子相互作用微扰算符.

对于无源的电磁辐射场，最方便的是采用库仑规范，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0, \quad \varphi = 0,$$

则微扰算符简化为

$$\hat{H}'(x,t) = \frac{e}{m_0 c}\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \frac{e^2 \boldsymbol{A}^2}{2m_0 c^2}, \tag{2.23}$$

这就是所需要的微扰算符形式. 这时薛定谔方程的形式为

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V + \frac{e}{m_0 c}\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \frac{e^2 \boldsymbol{A}^2}{2m_0 c^2}\right]\psi. \tag{2.24}$$

在通常不太强的辐射场中，可以略去含 A^2 的微扰项，使得一级近似的微扰可写为

$$\hat{H}(x,t) = \frac{e}{m_0 c}\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}. \tag{2.25}$$

以下的讨论中，就采用微扰算符(2.25)式. 在本章结束前，将对一级近似微扰论的适用条件作些讨论.

§2.5 吸收和发射概率(偶极近似)

现利用(2.22)式和由(2.25)式给出的微扰算符来计算辐射场中原子的吸收和发射概率.

已经指出，$\hat{H}'(x,t)$的傅氏展开为

$$\hat{H}'(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}'(x,\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$

$$\hat{H}'(x,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}'(x,t)e^{i\omega t}dt.$$

根据(2.25)式得到

$$\hat{H}'(x,\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \cdot \hat{\boldsymbol{p}}]dt.$$

因此，矩阵元为

$$H'(\omega)_{fi} = \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}[\boldsymbol{A}(x,t) \cdot \hat{\boldsymbol{p}}]_{fi}dt,$$

$$H'(\omega_{fi})_{fi} = \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{fi}t}(\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})_{fi}dt. \tag{2.26}$$

由(2.26)式可见，只要辐射场 $\boldsymbol{A}(x,t)$已给定，就可确定矩阵元

$H'(\omega_{fi})_{fi}$.

设入射的是一束沿$\boldsymbol{k}$方向传播、沿$\boldsymbol{l}$方向偏振的平面波，则其矢势$\boldsymbol{A}$可记为

$$\boldsymbol{A}(x,t) = \boldsymbol{A}(t)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = A(t)\boldsymbol{l}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \quad (2.27)$$

其中$\boldsymbol{l}$是偏振方向的单位矢，$\boldsymbol{k}$是波矢.

把(2.27)代入(2.26)式，原则上求出了微扰矩阵元. 但具体的计算仍需求助于近似. 这里仅就一个简单而重要的近似条件作较为详细的讨论：即在原子大小的空间范围内，辐射场近似是均匀的，场强$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$与$\boldsymbol{H}(t)$和位置无关. 这相当于原子的线度$a$显著小于电磁波波长$\lambda$，$\lambda \gg a$. 这个条件是经常得到满足的. 已知原子直径量级是$a \simeq 10^{-8}$cm，而可见光甚至紫外线的波长比10^{-8}cm大上千倍，只是到了X射线领域，这一条件才不一定满足. 对于满足$\lambda \gg a$的辐射场，可以把(2.27)式简化，认为$\boldsymbol{A}(x,t)$在原子范围内是均匀的，与位置无关. 于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) = A(t)\boldsymbol{l}, \quad (2.28)$$

这相当于(2.27)式中对因子$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$作展开，

$$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = 1 + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \cdots,$$

并只保留第一项. 将(2.27)式近似写成(2.28)式，就称作偶极子近似；将(2.28)式代入(2.26)式，

$$\begin{aligned} H'(\omega_{fi})_{fi} &= \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{fi}t}(\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})_{fi}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{i\omega_{fi}t}(\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})_{fi}dt \\ &= \frac{e}{m_0 c}A(\omega_{fi})(\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})_{fi}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中

$$A(\omega_{fi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{i\omega_{fi}t}dt$$

是辐射场$\boldsymbol{A}(t)$中频率为ω_{fi}的单色分量的振幅.

利用熟知的算符代数，有

$$\hat{p} = m_0\hat{V} = m_0 \frac{d\hat{r}}{dt} = m_0[\hat{r},\hat{H}^0],$$

即

$$\hat{p} = \frac{m_0}{i\hbar}(r\hat{H}^0 - \hat{H}^0 r)$$

(由于 r 是位矢,故在"x"表象中可省略算符记号). 因此,

$$(l \cdot \hat{p})_{fi} = \frac{m_0}{i\hbar} l \cdot \int u_f^*(x)(r\hat{H}^0 - \hat{H}^0 r)u_i(x)d\tau$$

$$= \frac{im_0}{\hbar}(E_f - E_i)(l \cdot r)_{fi}$$

$$= im_0\omega_{fi}(l \cdot r)_{fi}. \tag{2.30}$$

导出上式时,利用了 $\hat{H}^0$ 算符的厄米性,即

$$\int u_f^* \hat{H} r u_i d\tau = \int r u_i \hat{H}^{0*} u_f^* d\tau = E_f(r)_{fi}.$$

将(2.30)式代入(2.29)式,得到

$$H'(\omega_{fi})_{fi} = \frac{e}{m_0 c}A(\omega_{fi})(im_0\omega_{fi})(l \cdot r)_{fi}$$

$$= \frac{1}{m_0 c}A(\omega_{fi})(im_0\omega_{fi})(l \cdot D)_{fi}$$

$$= \frac{1}{c}A(\omega_{fi})(i\omega_{fi})(l \cdot D_{fi}), \tag{2.31}$$

式中 $D_{fi} = er_{fi}$ 是关于 i, f 两态的偶极矩矩阵元,表示对 i, f 两态的平均偶极矩,而 $l \cdot D_{fi}$ 代表这一平均 偶极矩在外场偏振方向的分量.

因此,由(2.22)式得到从 i 到 f 的跃迁概率是

$$G_{if} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2}|H'(\omega_{fi})_{fi}|^2$$

$$= \frac{4\pi^2}{\hbar^2}\frac{\omega_{fi}^2}{c^2}|A(\omega_{fi})|^2|l \cdot D_{fi}|^2. \tag{2.32}$$

如果把上式中的因子 $|A(\omega_{fi})|^2$ 改用场强或辐射场能流表示,则其物理意义更为清楚. 由于

$$A(t) = A(t)l = l\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$

故电场为（由于采用库仑规范，$\varphi=0$）

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=\frac{i\boldsymbol{l}}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\omega A(\omega)e^{-i\omega t}d\omega.$$

另一方面，也可以直接对 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 作傅氏展开，

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\varepsilon(t)\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\omega)e^{-i\omega t}d\omega.$$

比较以上两式，得到场强的单色成分的振幅为

$$\varepsilon(\omega)=\frac{i}{c}\omega A(\omega),$$

故(2.32)式成为

$$G_{if}=\frac{4\pi^2}{\hbar^2}|\varepsilon(\omega_{fi})|^2|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{D}_{fi}|^2. \qquad (2.33)$$

从(2.33)式可见，若使原子从 E_i 态到 E_f 态的跃迁概率不为零，必须：1. 外场中含有共振频率的分量

$$\omega_{fi}=\frac{E_f-E_i}{\hbar},$$

即 $\varepsilon(\omega_{fi})\neq 0$；2. 偶极矩矩阵元 $\boldsymbol{D}_{fi}$（f 与 i 两态之间的平均偶极矩）不为零，$\boldsymbol{D}_{fi}\neq 0$；3. $\boldsymbol{D}_{fi}$ 必须有与外场偏振方向 $\boldsymbol{l}$ 平行的分量，即 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{D}_{fi}\neq 0$. 从经典观念看来，那就是仅当原子在外场 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的振动方向上有偶极矩出现，与此同时外场中含有原子的固有频率 ω_{fi} 的振动，从而引起共振时，才有受迫的辐射或吸收产生.

(2.33)式可以通过用辐射能流 S 代替场强 $\varepsilon(\omega_{fi})$ 加以改写. 辐射场能量密度是 $\frac{\varepsilon^2(t)}{4\pi}$. 因此能流是 $\frac{c}{4\pi}\varepsilon^2(t)$. 如果辐射流只在时间 T 内不为零，则平均的入射流量 $\overline{S}$ 应为

$$\overline{S}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{c}{4\pi}\varepsilon^2(t)dt=\frac{c}{4\pi}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2(t)dt.$$

按帕塞瓦定理

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2(t)dt=\int_0^{\infty}|\varepsilon(\omega)|^2d\omega,$$

因此，

$$\overline{S} = \frac{c}{T}\int_0^{\infty} |\varepsilon(\omega)|^2 d\omega.$$

单色的入射流将为

$$S_{\omega} \equiv \frac{d\overline{S}}{d\omega} = \frac{c}{T}|\varepsilon(\omega)|^2.$$

代入(2.33)式，有

$$G_{if} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2}\frac{T}{c}S_{\omega}|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{D}_{fi}|^2.$$

由此得到单位时间中由 $i\rightarrow f$ 的跃迁概率为

$$p_{if} = \frac{G_{if}}{T} = \left(\frac{4\pi^2}{\hbar^2 c}\right)|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{D}_{fi}|^2_{\nu}S_{\omega}. \qquad (2.33')$$

按通常惯例，流量是作为频率 ν 的函数，而不用 $\omega=2\pi\nu$ 作变数. 由于

$$S_{\omega} \equiv \frac{d\overline{S}}{d\omega} = \frac{d\overline{S}}{d\nu}\cdot\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\overline{S}}{d\nu} = \frac{1}{2\pi}S_{\nu},$$

故

$$p_{if} = \frac{2\pi}{\hbar^2 c}|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{D}_{fi}|^2 S_{\nu}. \qquad (2.34)$$

在跃迁概率公式(2.34)中，如果 $E_f>E_i$，则 p_{if}就代表感应吸收概率；如果 $E_f<E_i$，即终态能量小于初态，p_{if}就表示感应辐射概率. 由(2.34)式还可看出，对应于两个给定能态 i 和 f 之间的跃迁，$i\rightarrow f$ 及 $f\rightarrow i$，应有

$$p_{if} = p_{fi},$$

即感应辐射概率和感应吸收概率相等. 如果把量子力学结果(2.34)式和爱因斯坦唯象地引入的感应跃迁公式(2.2)作比较，就可以得到(2.2)式中的系数 b_{fi}和 b_{if}. 为了明确起见，先假定 $E_f<E_i$，这样(2.34)式中的 p_{if}代表感应辐射跃迁概率，注意，(2.34)式还不能和(2.2)式立即做直接比较，因为

1. (2.2)式没有考虑偏振，即式中 $I_{\nu}(\Omega)$实为一束沿固定方向传播的自然光，而量子公式(2.34)中，假定入射平面波是沿 $\boldsymbol{l}$ 方向偏振的. 因此，必须把(2.34)式推广到非偏振的平面波情况. 这就

需要把(2.34)式对所有可能的偏振方向 $\boldsymbol{l}$ 求平均. 图 2.2 中,$\boldsymbol{D}_{fi}$ 与偏振方向 $\boldsymbol{l}$ 的夹角用 Θ 表示,所以(2.34)式成为

$$p_{if} = \frac{2\pi}{\hbar^2 c}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2 S_\nu \cos^2\Theta.$$

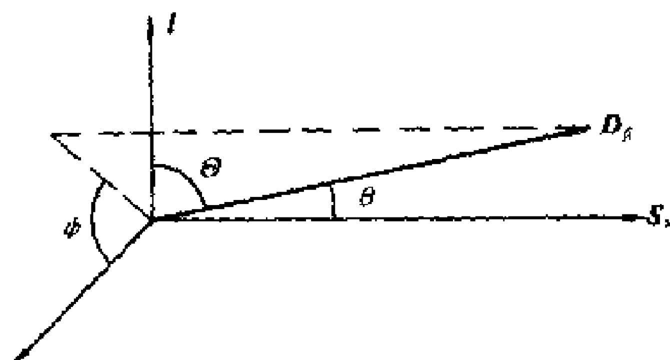


图 2.2

由图可见

$$\cos\Theta = \sin\varphi\sin\theta,$$

θ 是 $\boldsymbol{D}_{fi}$ 和平面波传播方向 $\boldsymbol{S}_\nu$ 之夹角. 由于 $\boldsymbol{S}_\nu$ 方向固定,所以对于这束非偏振辐射束,其偏振方向 $\boldsymbol{l}$ 可以在垂直 $\boldsymbol{S}_\nu$ 方向上随意改变,即 φ 角可在 0—2π 中等概率取值,故(2.34)式对所有方向的偏振求平均的结果是

$$\bar{p}_{if} = \frac{2\pi}{\hbar^2 c}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2 S_\nu \overline{\cos^2\Theta}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar^2 c}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2 S_\nu \overline{\sin^2\varphi}\sin^2\theta,$$

最后得到

$$\bar{p}_{if} = \frac{\pi}{\hbar^2 c}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2 S_\nu \sin^2\theta, \tag{2.35}$$

这里 θ 是 $\boldsymbol{D}_{fi}$ 与入射波方向 $\boldsymbol{S}_\nu$ 之间夹角.

2.(2.35)式仍无法直接与(2.2)式比较. 已经指出,(2.2)第二式表示从属于能级 E_i 的某一个量子态 i 到能级 E_f 的所有态的平

均感应辐射跃迁概率，而(2.34)及(2.35)式则是关于由 E_i 的某一个量子态 i 到 E_f 能级的一个量子态 f 的感应跃迁概率. 仅当下能级 E_f 没有简并时，两者才有相同意义. 因此，需将(2.35)式对属于上能级 E_i 和下能级 E_f 的所有态求和(假定 E_i,E_f 能级都是简并的，简并度分别记为 g_i,g_f)，得到从能级 E_i 到能级 E_f 的总的感应跃迁概率，再除以上能级 E_i 的简并度 g_i，就得到从 E_i 的一个态到 E_f 的所有态的平均跃迁概率 p_i，即

$$p_i = \frac{1}{g_i}\sum_{f,i}\overline{p}_{if} = \frac{\pi}{g_i\hbar^2 c}S_\nu\sum_{f,i}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2\sin^2\theta_{fi}, \qquad (2.36)$$

式中 θ_{fi}表示 $\boldsymbol{D}_{fi}$与 $\boldsymbol{S}_\nu$ 的夹角.

3. 注意(2.36)式给出的平均感应跃迁概率仍与(2.2)式有不同意义. 因为(2.2)式的 $I_\nu(\Omega)$ 代表平面入射波的辐射强度(即单位时间通过单位面积沿单位立体角的能量)，而(2.34)式中的 S_ν 代表平面波的能流(单位时间穿过单位面积的能量). 两者的关系是

$$S_\nu = \int_{4\pi} I_\nu(\Omega)d\Omega.$$

对于平面波，由于辐射只沿一固定方向才不是零，所以 $I_\nu(\Omega)$ 在与角度 Ω 的关系上具有 δ 函数的性质

$$I_\nu(\Omega) = S_\nu\delta(\Omega). \qquad (2.37)$$

考虑到这一点，就必须把(2.2)式对全部立体角积分，并利用(2.37)式，得到

$$p_i = \int_{4\pi} dp_i = \frac{b_{if}}{4\pi}S_\nu. \qquad (2.2')$$

该式才具有和(2.36)式完全相同的意义，将它与(2.36)式比较，得到感应辐射的爱因斯坦系数为

$$b_{if} = \frac{4\pi^2}{g_i\hbar^2 c}\sum_{f,i}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2\sin^2\theta_{fi}. \qquad (2.38)$$

类似可引出爱因斯坦感应吸收系数为(当 $E_f<E_i$)

$$b_{fi} = \frac{4\pi^2}{g_f\hbar^2 c}\sum_{f,i}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2\sin^2\theta_{fi},$$

可见有

$$g_i b_{if} = g_f b_{fi},$$

这与(2.4)式相合.

利用(2.7)式和(2.38)式,得到爱因斯坦自发辐射系数是

$$a_{if} = \frac{2h\nu_{if}^3}{c^2} b_{if} = \frac{16\pi^3 \nu_{if}^3}{g_i \hbar c^3} \sum_{f,i} |\boldsymbol{D}_{fi}|^2 \sin^2\theta_{fi}. \tag{2.39}$$

将(2.39)代入(2.1)式,再对全部立体角积分,就得到从 E_i 的一个量子态 i 到能级 E_f 的所有的量子态 f 的对方向平均的自发辐射跃迁概率 A_{if},

$$A_{if} \equiv p_s = \int_{4\pi} a_{if} \frac{d\Omega}{4\pi},$$

即

$$A_{if} = \frac{4\omega_{if}^3}{3\hbar c^3 g_i} \sum_{i,f} |\boldsymbol{D}_{fi}|^2. \tag{2.40}$$

由(2.40)式可见,原子从能级 E_i 到能级 E_f 的总的自发辐射跃迁概率当为 $g_i A_{if}$. 因此,一秒内原子辐射的频率为 ω_{if}的光子总能量为

$$\frac{dE}{dt} = g_i A_{if} \hbar\omega_{if} = \frac{4\omega_{if}^4}{3c^3} \sum_{i,f} |\boldsymbol{D}_{fi}|^2. \tag{2.41}$$

如果将(2.40)式对所有能量 $E_f < E_i$ 的终态 f 求和,就得到量子态 i 通过辐射而跃迁的总概率为

$$A_i = \sum_{f<i} A_{if}.$$

因此,原子处在激发态 i 上的平均寿命为

$$\tau_i = \frac{1}{A_i}.$$

将量子辐射公式(2.41)和经典的偶极子辐射公式(1.19)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} = \frac{2\omega^4}{3c^3} d^2$$

作比较,可见两者极为相似,即(2.41)式给出的辐射相当于一个固有频率为 ω_{if}、平均电矩为 $\overline{d^2} = 2\sum |\boldsymbol{D}_{fi}|^2$ 的经典偶极子的辐射.

这也就是为什么把本节计算跃迁概率的近似式(2.28)称做偶极近似的理由.

在许多书上也将A_{if}称为自发辐射的爱因斯坦系数. A_{if}和本章(2.1)式定义的自发辐射系数a_{if}之间由(2.40)式前面的积分表示联系着,即

$$A_{if}=\int_{4\pi}a_{if}\frac{d\Omega}{4\pi}.$$

因此,A_{if}是a_{if}沿全部立体角的方向平均值,不妨称A_{if}为方向平均自发辐射系数. 与此类似可定义方向平均感应辐射系数和感应吸收系数,

$$B_{if}=\int_{4\pi}b_{if}d\Omega\frac{1}{4\pi},\qquad B_{fi}=\int_{4\pi}b_{fi}d\Omega\frac{1}{4\pi}.$$

显然,系数A_{if},B_{if},B_{fi}之间的关系与(2.4)式和(2.7)式给出的a_{if},b_{if},b_{fi}之间关系相同,即

$$B_{fi}=\frac{g_i}{g_f}B_{if},$$

$$A_{if}=\frac{2h\nu_{if}^3}{c^2}B_{if}.$$

§2.6 振子强度

光谱学文献中,经常介绍有关"振子强度"的概念,它是用来表征原子吸收或发射的重要物理量. 一旦知道了振子强度,即可求出原子吸收系数. 振子强度和上节讨论的原子跃迁概率之间有简单关系. 若两个量子态i和f的能量分别是E_i和E_f,并且没有简并,则对应于跃迁$i\to f$的振子强度$f_{(f,i)}$定义为

$$f_{i\to f}\equiv f_{(f,i)}\equiv\frac{2m_0|\boldsymbol{D}_{fi}|^2\omega_{fi}}{3e^2\hbar},\qquad(2.42)$$

其中$\omega_{fi}\equiv\dfrac{E_f-E_i}{\hbar}$. 若$E_i>E_f$,则$f_{(f,i)}<0$,称为发射振子强度;当$E_i<E_f$,则$f_{(f,i)}>0$,称为吸收振子强度. 显然,对于一对给定能级$E_i$和$E_f$,在$f_{(f,i)}$和$f_{(i,f)}$之中,一个是吸收振子强度,则另一个就

是发射振子强度，并且

$$f_{(f,i)} = -f_{(i,f)}.$$

振子强度概念最早来源于经典的介质色散理论. 在经典理论中，介质的色散来自各个原子在外场中的极化，而原子中电子被看成是受准弹性力联结在原子上的，从而以一固有频率 ω_0 振动. 每个电子可看成为一个振子，则整个原子就看成为一组振子的集合. 在外来电磁波感应作用下，这些振子作受迫振动，而振子究竟是吸收还是发射电磁波能量，则取决于振子与外来电磁波的相位关系. 用这一观点可以解释原子的极化、吸收等. 在经典理论中定义的振子强度 $f^{cl}_{(f,i)}$ 就是原子中具有固有频率为 ω_{if} 的振子的个数(电子个数)，所以总是整数. 但量子力学的振子强度定义(2.42)式却并不那样简单，因为(2.42)式得到的 $f_{(f,i)}$ 不再是整数，$|f_{(f,i)}|<1$，而且可能为负值. 幸好量子力学的原子极化公式与经典理论形式上一致，f 值在公式中的地位也相同，即

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}^{外} = \left(\sum_i \frac{f_{(f,i)}}{\omega^2 - \omega_{if}^2} \right) \boldsymbol{E}^{外},$$

所以仍可以形式地把 $f_{(f,i)}$ 理解为固有频率是 ω_{if} 的“振子数目”(尽管 $|f_{(f,i)}|<1$). 由于 $-1=e^{-i\pi}$，对于 $f_{(f,i)}<0$ 情况，则相当于相应的振子和外场相位相反，因此不是吸收外场能量，而是发射能量，这就是把 $f_{(f,i)}<0$ 的振子强度称为发射振子强度的理由，$f_{(f,i)}>0$ 则称为吸收振子强度.

当 E_i 和 E_f 两个能级有简并时(假定简并度分别是 g_i 和 g_f)，常常定义平均振子强度的概念为

$$\bar{f}_{(f,i)} \equiv \frac{1}{g_i} \sum_{i,f} f_{(f,i)},$$

$$\bar{f}_{(i,f)} \equiv \frac{1}{g_f} \sum_{i,f} f_{(i,f)}, \tag{2.43}$$

式中求和是对上、下两个能级的所有量子态进行的. 在此不妨把 $\sum_{i,f} f_{(f,i)}$ 或 $\sum_{f,i} f_{(i,f)}$ 称为关于简并能级 E_i 和 E_f 的总振子强度，则可以把 $\bar{f}_{(f,i)}$ 理解为关于 E_i 能级的一个量子态与能级 E_f 的所有

态的平均振子强度. 对 $\overline{f}_{(i,f)}$的意义也作类似的解释. 显然，平均吸收振子强度和平均发射振子强度的关系是

$$g_i \overline{f}_{(f,i)} = - g_f \overline{f}_{(i,f)}. \tag{2.44}$$

自发辐射跃迁概率 A_{if}和吸收振子强度$\overline{f}_{(i,f)}$有很简单关系. 对于给定能级 $E_i,E_f(E_i>E_f)$都不简并的情况，即 $g_i=g_f=1$，这一关系很简单. 由定义(2.42)和(2.40)可求得

$$f_{(i,f)} = \frac{m_0c^3}{2e^2\omega_{if}^2}A_{if}. \tag{2.45}$$

(注意，因 $E_i>E_f$，吸收过程当为 $f\to i$，故吸收振子强度应当记为 $f_{(i,f)}$，得以上表示.)如果有简并存在，得到略为复杂的公式：

$$\overline{f}_{(i,f)} = \left(\frac{g_i}{g_f}\right)\frac{m_0c^3}{2e^2\omega_{if}^2}A_{if}. \tag{2.46}$$

(2.45)式或(2.46)式表示，只要知道了自发辐射跃迁概率 A_{if}，就可确定吸收振子强度，反之亦然.

§2.7 对近似条件适用性的讨论

上节在导出跃迁概率公式(2.34)(以及随后的公式)时，明显做了两步近似. 1. 在写出辐射场和原子相互作用微扰项(2.23)后，我们略去含 $\boldsymbol{A}^2$的二级微量，微扰近似写成 $\hat{H}(x,t)\simeq\frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$，这称为一级近似微扰论. 2. 再进一步，在确定 $\hat{H}'(x,t)$中关于辐射场 $\boldsymbol{A}(x,t)$的形式时，用近似式(2.28)代替(2.27)，即将 $\boldsymbol{A}(x,t)$中的因子 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$作泰勒展开，$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=1+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\cdots$，并只保留第一项. 这相当于忽略辐射场的推迟作用，近似地认为原子范围中场是均匀的，并称这一近似为偶极近似.

现在分别就这两步近似作一些讨论. 首先讨论关于一级近似微扰论的适用范围. 微扰算符(2.23)中，前后两项之比是

$$\frac{epA}{m_0c}\Bigg/\frac{e^2A^2}{2m_0c^2} = \frac{2pc}{eA}. \tag{2.47}$$

由(2.47)可见，要使一级微扰近似成立，必须$\frac{2pc}{eA}\gg1$. 现在看看究

竟在什么情况下，这一条件可以满足. 对于外场中原子，如果电子轨道半径是 a，则按测不准关系，电子动量 p 的量级约为 $p\sim\frac{h}{a}$. 然后再来估计 A 的大小. 由于场强 $\varepsilon=-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$，所以矢势 A 和场强 ε 的关系为 $A\sim\frac{c}{\nu}\varepsilon$，其中 ν 是辐射频率. 场的能密度为 $\rho=\frac{\varepsilon^2}{4\pi}$，将辐射场的平均光子数密度记为 n_{ph}，则能密度

$$\rho=\frac{\varepsilon^2}{4\pi}\simeq n_{\mathrm{ph}}h\nu.$$

因此，场强 $\varepsilon\simeq(4\pi n_{\mathrm{ph}}h\nu)^{\frac{1}{2}}$，矢势 $|A|\simeq\frac{c}{\nu}(4\pi n_{\mathrm{ph}}h\nu)^{\frac{1}{2}}$. 此外，由于在量子辐射理论问题中，电子的动能 E_K 是可以和辐射的光子能量 $h\nu$ 相比较的，而电子的轨道动能又和其势能同量级，即 $E_K\simeq\frac{e^2}{a}\simeq h\nu$，于是得到 $e\simeq(ah\nu)^{\frac{1}{2}}$.

把以上关于 p、A、e 的估值一并代入比值 $\frac{2pc}{eA}$ 中，则求出 A 的二次项与一次项之比为

$$\frac{2pc}{eA}\simeq\frac{1}{(n_{\mathrm{ph}}a^3)^{\frac{1}{2}}}.$$

可见，能够应用一级微扰论的条件是

$$n_{\mathrm{ph}}a^3\ll 1, \tag{2.48}$$

即在原子范围的体积($\sim a^3$)之内的平均光子数要远小于一个，即辐射场不能太强，场能密度不可太大，否则 A^2 项不能忽略，这时体系将会出现发射或吸收两个以上光子的过程.

当然，也并不是说，辐射场越弱越好. 弱辐射场的量子起伏性质将会变得明显. 为使辐射场能够当作经典的电磁场处理，必须在半径大小为辐射波长的球体内含有充分多的光子，即

$$\lambda^3 n_{\mathrm{ph}}\gg 1. \tag{2.49}$$

(2.48)和(2.49)式规定了半经典的一级微扰论的适用条件. 利用 $\lambda=c/\nu$，电子能量 $E_K\simeq h\nu\simeq pv$，电子动量 $p\simeq h/a$，则条件

(2.49)又可表为

$$n_{\mathrm{ph}}a^3\left(\frac{c}{v}\right)^3 \gg 1. \tag{2.50}$$

其次，再讨论一下有关偶极近似的问题. 以上跃迁概率的计算是在(2.27)式中采用了偶极近似 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\simeq 1$ 而得到的. 如果不作此近似，则从(2.27)和(2.26)出发，得到微扰矩阵元的准确形式为

$$\begin{aligned} H'(\omega_{fi})_{fi} &= \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{fi}t}(\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})_{fi}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0c}\int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{i\omega_{fi}t}dt\boldsymbol{l}\cdot(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}})_{fi} \\ &= \frac{e}{m_0c}A(\omega_{fi})[\boldsymbol{l}\cdot(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}})_{fi}]. \end{aligned}$$

与前面作法完全类似，仍用能流 S_ν 来代替场的单色振幅 $A(\omega_{fi})$，则利用上面的矩阵元就可得到从量子态 i 到 f 的单位时间的跃迁概率是

$$p_{if} = \frac{2\pi}{\hbar^2 c}|\boldsymbol{l}\cdot\widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}(\boldsymbol{k})|^2 S_\nu. \tag{2.51}$$

(2.51)式和偶极近似跃迁概率公式(2.34)相比较，形式上很相似，只是用矩阵元 $\widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}(\boldsymbol{k})$ 代替了偶极矩矩阵元 $\boldsymbol{D}_{fi}$. (2.51)式中 $\boldsymbol{D}_{fi}(\boldsymbol{k})$ 的定义是

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}(\boldsymbol{k}) \equiv \frac{e}{m_0\omega_{fi}}(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{p}})_{fi}.$$

展开 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$,

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 1 + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \cdots, \tag{2.52}$$

则

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}(\boldsymbol{k}) &= \frac{e}{m_0\omega_{fi}}\int u_f^*(1 + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \cdots)\hat{\boldsymbol{p}}u_i d\tau \\ &= \widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{D}_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{k}) + \cdots. \end{aligned} \tag{2.53}$$

第一项为

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(1)}(\boldsymbol{k}) = \frac{e}{m_0\omega_{fi}}(\hat{\boldsymbol{p}})_{fi} = \frac{e}{m_0\omega_{fi}}(im_0\omega_{fi})(\boldsymbol{r})_{fi} = i\boldsymbol{D}_{fi}.$$

这表明，如果只保留(2.53)或(2.52)式的首项，则公式(2.51)就回到偶极近似公式(2.34)。因此，讨论偶极近似适用的条件，实际上就是看看究竟在什么样的情况下(2.53)式第二项对跃迁的贡献可以忽略。

现有两种情况，偶极近似将不适用，而必须考虑第二项。1. 如果波长 λ 可以和原子线度 a 比较，即 $\lambda\sim a$。前面曾经指出，当 $\lambda\gg a$ 时，才可以引出偶极近似公式(2.34)，其理由从(2.53)式看得很清楚。根据(2.53)式，第二项约为首项的 $ka=\frac{2\pi}{\lambda}a$ 倍。因此，在 $\lambda\gg a$ 时，第二项可略去；当 $\lambda\sim a$ 时(例如用 X 射线照射原子)，必须附加第二项。2. 有时尽管条件 $\lambda\gg a$ 得到满足，但却计算出 $\tilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(1)}=i\boldsymbol{D}_{fi}=0$ 的结果。此即通常所指的偶极辐射的禁戒跃迁情况，这时就必须保留第二项 $\tilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(2)}$ 了，尽管 $\tilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(2)}$ 是个小量。

这里指出，第二项对跃迁的贡献相当于经典理论中的电四极辐射和磁偶极辐射。由(2.53)式可见

$$\boldsymbol{D}_{fi}^{(2)}(\boldsymbol{k})=\frac{ie}{m_0\omega_{fi}}\int u_f^*(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\hat{p}u_i d\tau.$$

为了计算简单，选入射的平面偏振波的传播方向为 x 轴，偏振方向 $\boldsymbol{l}$ 为 y 轴(因为 $\boldsymbol{k}$ 总和 $\boldsymbol{l}$ 垂直)，此时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}\cdot\tilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(2)}&=\frac{ie}{m_0\omega_{fi}}\int u_f^*(kx)\hat{p}_y u_i d\tau\\&=\frac{ie}{m_0c}\int u_f^* x\hat{p}_y u_i d\tau\\&=\frac{ie}{m_0c}(x\hat{p}_y)_{fi},\end{aligned}\tag{2.54}$$

(因为 $k=\frac{\omega_{fi}}{c}$.)为了计算矩阵元 $(x\hat{p}_y)_{fi}$，可以重写算符 $x\hat{p}_y$，

$$x\hat{p}_y=\frac{1}{2}(x\hat{p}_y+\hat{p}_x y)+\frac{1}{2}(x\hat{p}_y-\hat{p}_x y).\tag{2.55}$$

先看其中第二项，已知

$$\hat{\boldsymbol{J}}_{\text{orb}}=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}}\equiv\hbar\hat{\boldsymbol{K}}$$

是电子轨道角动量算符，$|\boldsymbol{K}|^2$ 的本征值已知为 $l(l+1)$，所以

$$(x\hat{p}_y - \hat{p}_x y) = \hbar\hat{K}_z$$

是电子轨道角动量沿 z 轴的分量. 再看第一项, 由于

$$\hat{p} = m_0 \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = m_0[\boldsymbol{r}, \hat{H}^0],$$

所以有

$$x\hat{H}^0 - \hat{H}^0 x = \frac{i\hbar}{m_0}\hat{p}_x,$$

$$y\hat{H}^0 - \hat{H}^0 y = \frac{i\hbar}{m_0}\hat{p}_y.$$

分别用 y 右乘第一式, 用 x 左乘第二式, 相加得到

$$x\hat{p}_y + \hat{p}_x y = \frac{m_0}{i\hbar}(xy\hat{H}^0 - \hat{H}^0 xy).$$

因此, (2.55)式可写成

$$x\hat{p}_y = \frac{im_0}{2\hbar}(\hat{H}^0 xy - xy\hat{H}^0) + \frac{\hbar}{2}K_z.$$

利用 $\hat{H}^0$ 的厄米性及 $\{u_K\}$ 是 $\hat{H}^0$ 的本征函数系的性质, 可得

$$(x\hat{p}_y)_{fi} = \int u_f^* x\hat{p}_y u_i d\tau$$

$$= \frac{im_0\omega_{fi}}{2}(xy)_{fi} + \frac{\hbar}{2}(K_z)_{fi},$$

由此得到

$$\boldsymbol{l}\cdot\widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(2)} = \frac{ie}{m_0 c}(x\hat{p}_y)_{fi} = \frac{-e\omega_{fi}}{2c}(xy)_{fi} + \frac{ie\hbar}{2m_0 c}(K_z)_{fi}. \tag{2.56}$$

由(2.56)不难看出附加项 $\widetilde{\boldsymbol{D}}_{fi}^{(2)}$ 的意义. 已知一个角动量为 $\boldsymbol{J}_{\text{orb}} = \hbar\boldsymbol{K}$ 的电子的磁矩是 $-\frac{e}{2m_0 c}\boldsymbol{J}_{\text{orb}}$, 故上式第二项联系着电子磁偶极矩的 z 分量(它和传播方向与偏振方向都垂直). 回忆经典电动力学中原子的电四极矩张量 $\mathbf{Q}$:

$$
\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\frac{e}{2}x^2 & \frac{e}{2}xy & \frac{e}{2}xz\\ \frac{e}{2}yx & \frac{e}{2}y^2 & \frac{e}{2}yz\\ \frac{e}{2}zx & \frac{e}{2}zy & \frac{e}{2}z^2\end{pmatrix},
$$

故(2.56)式第一项联系着电四极矩的 xy 分量. 可见，附加项对应着磁偶极矩辐射和电四极矩辐射.

上面已经指出，对于可见光，电四极矩和磁偶极矩约小 $\frac{a}{\lambda}\sim 10^{-3}$ 倍，所以它们对跃迁概率的贡献要比偶极辐射跃迁小 $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2\sim 10^{-6}$ 倍[见(2.51)式]. 因此，当偶极辐射不可能时($\boldsymbol{D}_{fi}=0$)，在受激态上的原子寿命要比有偶极辐射时大 10^6 倍，而后者的寿命量级已知约为 10^{-8}s. 因此，在只存在四极辐射或磁偶极辐射时，寿命约为 $\tau\sim 10^{-2}$s，这种能态称为亚稳态.

参 考 文 献

[1] Bekefi, G., Radiative Processes in Plasmas, Wiley, New York, 1966.

[2] Bethe, H. and Jackiw, R., Intermediate Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968.

[3] Blokhintsev, D., Quantum Mechanics, Dordrecht, Reidel, 1964.

[4] Kramers, H., Quantum Mechanics, Amsterdam, North Holland, 1958.

[5] Ribicki, G. B. and Lightman, A. P., Radiation Processes in Astrophysics, Wiley Interscience, 1979.

[6] Frank, H. Shu, The Physics of Astrophysics Volume I: Radiation, University Science Books, Mill Valley, California, 1992.

[7] Tucker, W., Radiation Processes in Astrophysics, MIT Press, Cambridge, Mass., 1976.

第三章　辐射转移

对于辐射问题的完整讨论应该包括两部分，即辐射产生的机制和辐射在介质中的输运性质. 各种介质（例如等离子体或中性气体）对辐射传播过程有着显著的影响，穿过介质时，辐射强度，辐射谱形和偏振状态等都可能发生改变. 研究辐射的传播性质，无论对理论工作和实测都有重要意义.

当然，介质和辐射的影响是相互的，辐射也将反过来改变介质的物理状态和性质. 实际上，对多数天体而言，各部分之间的能量交换的重要方式之一就是通过辐射完成的. 因此，研究辐射传播理论对探讨各类天体的结构和演化（例如建立恒星大气模型），同样有着基本意义.

传播中介质和辐射的相互影响归根到底是两者之间有能量交换，这一特定的能量交换过程就叫辐射转移. 有时候，人们给辐射转移做出更直观但适用范围较窄的定义：辐射转移指辐射源中在某一给定频率 ν 处的总发射量不等于同一时间间隔内同一频率处离开源表面的总出射量，显然源内的发射量不同于源表而出射量，原因就在源内介质和辐射场有能量交换（介质对辐射的吸收，发射和散射）. 这一定义的局限性在于它只讨论整个辐射源内的转移，没有包括其他常见的辐射转移过程，例如一束辐射穿过辐射源以外的介质时的变化.

本章将从能量守恒定律出发，建立辐射转移过程. 为此，先引入一些有关辐射的基本概念和基本物理量. 既然辐射转移是讨论辐射与介质之间的相互作用，因此在要建立的辐射转移方程中必然包含两类物理量：一类是用来描写辐射场本身物理性质的，另一类则描写辐射场中的介质. 下面就来分别引出两类物理量，然后通过辐射转移方程，建立两类物理量之间的联系.

§ 3.1　一些基本概念

3.1.1　辐射强度和辐射通量

为了分析辐射场，可以考虑场中任一点沿任一方向的小面元，其面积是 $d\sigma$，其法线方向是 $\boldsymbol{n}$（图 3.1）。如果在 dt 时间内，沿与 $d\sigma$ 法向 $\boldsymbol{n}$ 成 θ 角的方向的小立体角元 $d\omega$，穿过面元 $d\sigma$ 的频率在 ν—$\nu+d\nu$ 范围的辐射能量记为 dE_ν，则这一能量可表示成

$$dE_\nu = I_\nu \cos\theta d\sigma d\nu d\omega dt, \tag{3.1}$$

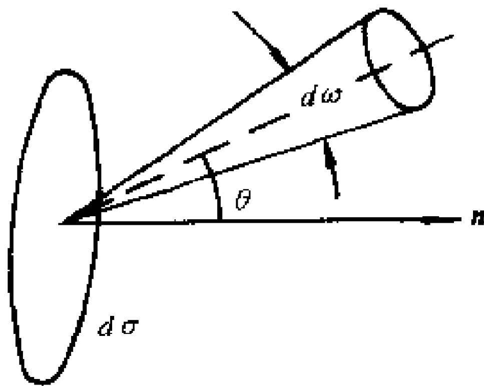


图 3.1

其中，因子 $d\sigma\cos\theta$ 可以称为有效面积，表示小面元 $d\sigma$ 在和辐射光束垂直的方向上的投影。因此，(3.1)式中的比例系数 I_ν 的物理意义是单位时间内、单位频率间隔中、沿着围绕光传播方向上单位立体角穿过垂直于辐射传播方向的单位面积的辐射能量。I_ν 称为比强度或简称强度。一般而言，强度是辐射场中位置、方向和时间的函数，即

$$I_\nu = I_\nu(x, y, z, l, m, n, t).$$

如果强度和位置、方向无关，则辐射场就是均匀、各向同性的。把比强度对所有频率积分得到积分强度记为 I，

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu.$$

(3.1)式中的 dE_ν 只代表沿给定方向立体角元 $d\omega$ 穿过面元 $d\sigma$ 的辐射能量。对所有方向通过 $d\sigma$ 的辐射能量求和，就得到

$$dE_\nu^* = d\nu d\sigma dt \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta d\omega.$$

由于当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时，因子 $\cos\theta$ 是负的，所以 dE_ν^* 事实上就是时间 dt

内在频率间隔 $d\nu$、通过面积 $d\sigma$ 向外流出的能量$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$和向里流入的能量$\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\right)$的差额，即 dE_ν^* 代表通过 $d\sigma$ 的净流量. 用 $d\sigma dt d\nu$ 除 dE_ν^*，便得到辐射净通量，简称通量，记为 πF_ν（常数 π 是为了以后计算方便引入的），即

$$\pi F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \cos\theta d\omega. \tag{3.2}$$

通量 πF_ν 代表单位时间、单位频率间隔通过单位截面积的辐射净流量.

如果采用球坐标，并将面元 $d\sigma$ 的法线方向定义为 z 轴正方向，则立体角 $d\omega$ 为

$$d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi,$$

因而通量可写为

$$\pi F_\nu = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu(\theta,\varphi)\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi.$$

3.1.2 辐射场的能量密度

利用强度 I_ν 的概念，可以导出一个公式，求出辐射场中任一点的能量密度 $u_\nu d\nu$. $u_\nu d\nu$ 代表单位体积中在频率间隔 ν—$\nu+d\nu$ 中的辐射场能量.

为了找到这一关系，考虑位于给定点的一个无穷小体元 v，其边界面积为 σ. 再考虑一个包围体元 v 的更大的封闭面 Σ. 假定 Σ 的面积显著大于 σ（图 3.2），但仍使 Σ 包围的体积 V 足够小，以至 Σ 面内的辐射场仍可近似视作均匀的.

显然，所有穿过小体元 v 界面 σ 的某一面元 $d\sigma$ 的辐射束必与大表面 Σ 相交，把相交面积记为 $d\Sigma$，再把联接小面元 $d\Sigma$ 和 $d\sigma$ 的直线与这两小面元的法向所夹的角分别记作 Θ 和 θ，所以一秒钟流过 $d\Sigma$ 面元（当然也流过 $d\sigma$）的能量为

$$I_\nu \cos\Theta d\Sigma d\omega' d\nu = I_\nu d\nu \frac{\cos\theta\cos\Theta d\sigma d\Sigma}{r^2}. \tag{3.3}$$

这是因为小面元 $d\sigma$ 对 $d\Sigma$ 上任一点所张立体角是

$$d\omega' = d\sigma\cos\theta/r^2,$$

r 是 $d\sigma$ 到 $d\Sigma$ 的距离(其实也就是 v 中任一点到 $d\Sigma$ 的距离，因为 $V\gg v$，v 可看成一点. 图 3.2 中的体元 v 被大大夸张). 如果这束辐射穿过小体元 v 的路程长度是 l，则单位时间入射到 $d\sigma$ 面的辐射将以 l/c 的时间(c 为光速)在小体元中穿过. 这也就是入射的能量在体元 v 内停留的时间. 故这束辐射对体元 v 内总辐射能量的贡献应当是

$$I_\nu d\nu\frac{\cos\theta\cos\Theta d\sigma d\Sigma}{r^2}\frac{l}{c} = \frac{1}{c}I_\nu d\nu dv d\omega. \tag{3.4}$$

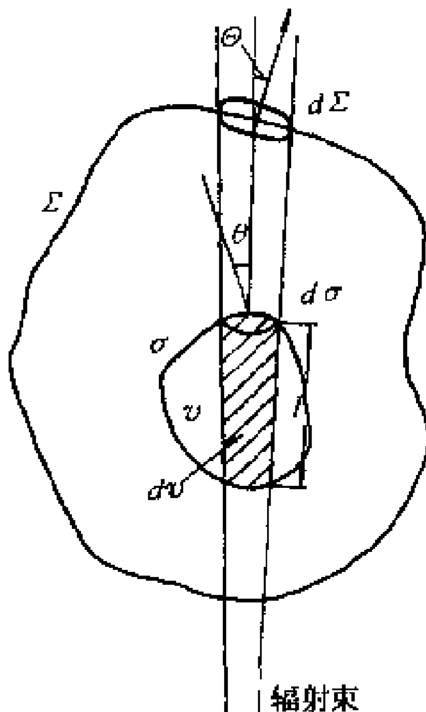


图 3.2

这是因为面元 $d\Sigma$ 对小体元 v 中任一点所张的立体角是

$$d\omega = d\Sigma\cos\Theta/r^2,$$

而辐射束在小体元 v 中所截出的小柱体的体积是

$$dv = ld\sigma\cos\theta,$$

所以，如果将(3.4)式对全部立体角 ω 和整个体积 v 积分，就得到体积 v 中在频率间隔 $\nu—\nu+d\nu$ 内的辐射能为

$$u_\nu dv = \frac{d\nu}{c}\int dv\int_{4\pi}I_\nu d\omega$$

$$= \frac{v}{c}d\nu\int_{4\pi}I_\nu d\omega,$$

由此得到能密度为

$$u_\nu = \frac{1}{c}\int_{4\pi}I_\nu d\omega. \tag{3.5}$$

辐射场的积分能密度 u 也可用积分辐射强度 I 表示为

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{1}{c}\int_{4\pi}Id\omega. \tag{3.6}$$

对于各向同性辐射场，I_ν 及 I 与方向无关，则有

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu, \tag{3.7}$$

$$u = \frac{4\pi}{c} I. \tag{3.8}$$

对于各向异性的辐射场，为了方便计，常引入平均辐射强度 $\bar{I}_\nu$，

$$\bar{I}_\nu = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu d\omega,$$

因而辐射能密度一般可表为

$$u_\nu \equiv \frac{4\pi}{c}\bar{I}_\nu. \tag{3.9}$$

3.1.3 发射系数和吸收系数

除了引入描写辐射场本身的一些物理量(如 I_ν, F_ν, u_ν，等)以外，还需要再引入一些量，以便能够描写辐射场中介质的性质.

介质的一个显著特点是对辐射的吸收作用，可引入吸收系数来描写它. 设强度为 I_ν 的光束垂直入射于厚度为 ds 的介质层表面上，经过吸收层的强度就减弱为 $I_\nu - dI_\nu$，亦即获得了负的增量 $-dI_\nu$，这一增量正比于厚度 ds 及入射强度 I_ν 的乘积，即

$$dI_\nu = -k_\nu I_\nu ds, \tag{3.10}$$

比例系数 k_ν 定义为介质的吸收系数，它表示单位强度的辐射束穿过单位长度的吸收介质后强度的负增量. 单位是 cm^{-1}.

介质的另一特点是它本身也可能产生辐射(例如介质是炽热气云). 辐射场中某一点处体积元 dv 中的介质，在 dt 时间中，在频率 ν—$\nu+d\nu$ 内沿某一方向的立体角元 $d\omega$ 所发射的辐射能量 dE_ν 为

$$dE_\nu = j_\nu dv d\nu d\omega dt. \tag{3.11}$$

比例系数 j_ν 叫做谱发射系数或称谱发射率，表示单位体积介质在单位时间中沿某一给定方向单位立体角所辐射的频率为 ν 的单位频率间隔中的能量值. 一般而言，j_ν 是位置、方向、时间和频率的函数. 对于各向同性的辐射场，j_ν 与方向无关. j_ν 的常用单位是 erg/(cm^3 · Hz · s · sr).

介质的吸收和发射之间一般不一定有确定关系，但假如介质处于“局部热平衡”状态(LTE)下(即介质的每一个小区域内是热平衡的，可用一个局部温度值描写)，则对每个小区域内的热辐射，发射系数 j_ν 和吸收系数 k_ν 之间可以有定量关系式存在，即熟知的基尔霍夫定律

$$j_\nu = k_\nu B_\nu(T), \tag{3.12}$$

其中

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/KT}-1}$$

是普朗克函数. 它表示温度为 T 的绝对黑体在频率为 ν 的位置上所产生的辐射强度.

3.1.4 光学厚度(光深)

如果将(3.10)式对路程 ds 积分，得到

$$I_\nu(s) = I_\nu^0 e^{-\int_0^s k_\nu ds},$$

其中 I_ν^0 代表入射处初始强度. 因此，辐射强度在介质中是按指数定律衰减的. 指数

$$\tau_\nu = \int_0^s k_\nu ds \tag{3.13}$$

称为介质的光学厚度或光深. 元光深 $d\tau_\nu = k_\nu ds$. 如果介质是均匀的，吸收系数 κ_ν 与位置无关，则

$$\tau_\nu = k_\nu \cdot s. \tag{3.14}$$

可见介质的光学厚度不仅和介质的几何厚度 s 有关，同时也和吸收系数 k_ν 有关.

当光深 $\tau_\nu \gg 1$ 时，射出介质的强度 $I_\nu(s) \simeq 0$，即进入介质的辐射几乎不能穿出介质. 因此，满足 $\tau_\nu \gg 1$ 的介质称为光学厚的. 反之，当 $\tau_\nu \ll 1$ 时，$I_\nu(s) \simeq I_\nu^0$，即辐射在通过介质时几乎不衰减. 满足 $\tau_\nu \ll 1$ 的介质称为光学薄的.

以上引入的物理量如吸收系数 k_ν 和光深 $\tau_\nu = k_\nu s$ 都是宏观物理量，但具有更深入的微观意义，现加以说明. 指数衰减律

$$I_\nu(s) = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} = I_\nu^0 e^{-k_\nu s},$$

可以写成

$$I_\nu(s)/I_\nu^0 = e^{-\tau_\nu} = e^{-k_\nu s}.$$

而 I_ν 和 I_ν^0 可分别写成 $I_\nu = nh\nu$，及 $I_\nu^0 = n_0 h\nu$. n_0 和 n 分别是入射点 O 和 S 点处单位时间过垂直辐射束方向的单位面积的光子数. 因此有

$$I_\nu/I_\nu^0 = n/n_0 = e^{-\tau_\nu} = e^{-k_\nu s}.$$

可见 $e^{-\tau_\nu}$ 表示一个光子在吸收介质中自由穿过路程 s 而不被吸收的概率，即自由穿过光深为 τ_ν 的路程而不被吸收的概率，由于归一性，$\int_0^\infty e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$，因此求出光子自由飞行的平均光深是

$$\langle \tau_\nu \rangle = \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu \Big/ \int_0^\infty e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1. \tag{3.15}$$

(3.15)式可以写成(对于均匀介质)

$$\langle \tau_\nu \rangle = k_\nu \langle s \rangle = 1,$$

由此可见吸收系数 k_ν 的微观物理意义是

$$\langle s \rangle = 1/k_\nu. \tag{3.16}$$

(3.16)式表示，光子在介质中穿行的平均自由程 $\langle s \rangle$ 恰为介质吸收系数的倒数. 因此(3.16)式给出吸收系数 k_ν 的微观意义，将该式代入(3.14)式，得光深 τ_ν 的另一常见表达式：

$$\tau_\nu \equiv k_\nu s = s/\langle s \rangle \tag{3.17}$$

(3.17)式的意义不说自明，它给予光深 τ_ν 最明晰的物理意义.

§3.2 辐射转移方程

利用以上的基本概念，可以引出辐射的转移方程. 该方程给出辐射在介质中穿行时强度的变化规律. 显然，辐射转移的最直接后果就是辐射传播过程中，由于和介质交换能量造成强度的变化. 推导这个方程的基本依据就是辐射过程中的能量守恒定律.

考虑介质中一个底面积为 $d\sigma$、高度为 ds 的柱形体元(图3.3). 令 dE^{in} 为在时间 dt、在立体角 $d\omega$、频率间隔为 ν—$\nu+d\nu$ 通

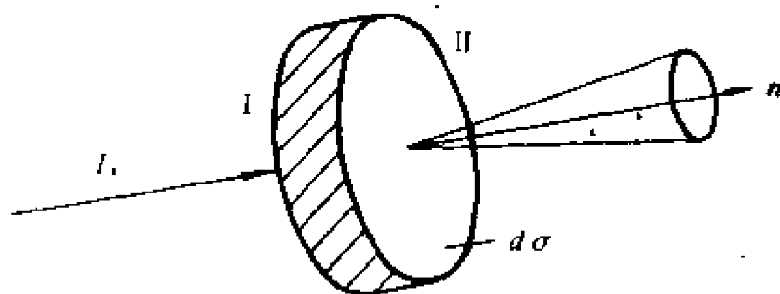


图 3.3

过小柱体第一个底面(Ⅰ)$d\sigma$ 进入的辐射能量，根据(3.1)式，等于(注意在垂直投射下，$\cos\theta=1$)

$$dE^{in} = I_\nu d\omega d\nu d\sigma dt.$$

由第二底面(Ⅱ)外出的辐射能量为

$$dE^{out} = (I_\nu + dI_\nu) d\omega d\nu d\sigma dt.$$

出射能量 dE^{out} 一般不等于入射能 dE^{in}，因为柱体内介质本身有吸收和辐射效应.首先，根据(3.11)式，柱体 $d\sigma ds$ 在同一立体角 $d\omega$ 内、在相同时间 dt 和频率间隔 ν—$\nu+d\nu$ 内所辐射的能量为

$$dE_e = j_\nu d\sigma ds d\omega d\nu dt.$$

根据(3.10)，小柱体吸收的辐射能量是

$$dE_a = -k_\nu dE^{in} ds$$

[显然(3.10)不只适用于强度，也适用于能量]，或者

$$dE_a = -k_\nu I_\nu d\omega d\sigma dt d\nu ds.$$

将能量守恒定律应用于小柱体，就有

$$dE^{out} = dE^{in} + dE_e + dE_a.$$

(这里没有考虑散射项 dE^s 的贡献，否则应加上一项 $dE^s = -k^s_\nu I_\nu d\omega d\sigma ds dt d\nu$，式中 k^s_ν 表示散射"吸收"系数.但由于散射问题的重要性和复杂性，下面将在§3.6，§3.7，§3.8 中专述.)注意，其中 dE_a 是负的，由此得到

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -k_\nu I_\nu + j_\nu.$$

在辐射传播问题中，用光深 τ_ν 代替几何路程长度 s 更为方便. 为此，将上式两边除以 k_ν，注意到 $d\tau_\nu = k_\nu ds$，则有

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + j_\nu/k_\nu.$$

上式中，比值 j_ν/k_ν 综合表示了介质的发射和吸收的性质，称做源函数，记为 S_ν，

$$S_\nu \equiv j_\nu/k_\nu. \tag{3.18}$$

利用(3.18)式将得到

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu. \tag{3.19}$$

这就是辐射转移方程，是根据能量守恒定律导出的. 它给出当辐射穿过一个又有吸收又有辐射的介质时强度的变化规律. (3.19)式的形式解不难求出. 如果在方程两边同乘以因子 e^{τ_ν}，则有

$$e^{\tau_\nu}\left(\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu\right) = \frac{d}{d\tau_\nu}(e^{\tau_\nu}I_\nu) = e^{\tau_\nu}S_\nu.$$



图 3.4

沿着辐射传播方向自 A 点到 B 点(图 3.4)积分上式，就得到

$$I_\nu(B)e^{\tau_\nu(B)} = I_\nu(A)e^{\tau_\nu(A)} + \int_A^B e^{\tau'}S_\nu(\tau')d\tau'.$$

$\tau_\nu(A)$，$\tau_\nu(B)$ 分别是从光深原点处到 A 点和 B 点的光深. 上式可改为

$$I_\nu(B) = I_\nu(A)e^{-(\tau_\nu(B)-\tau_\nu(A))} + \int_A^B e^{-(\tau_\nu(B)-\tau')}S_\nu(\tau')d\tau',$$

式中 $(\tau_\nu(B)-\tau_\nu(A)) = \tau_0$ 就是辐射从 A 点传播到 B 点时介质的光深. 同理，$\tau_\nu(B)-\tau' \equiv \tau$ 就是 A 与 B 之间的某一点 S' 到 B 点的光深.

如果用 τ 做新积分变数，则上式改为

$$I_\nu(B) = I_\nu(A)e^{-\tau_0} + \int_B^A e^{-\tau} S_\nu(\tau) d\tau$$

$$= I_\nu(A)e^{-\tau_0} + \int_{\tau_B}^{\tau_A} e^{-\tau} S_\nu(\tau) d\tau.$$

但从 τ 的意义可知，B 点处 $\tau_B=0$，而 A 点处 $\tau_A=\tau_0$，故上式可进一步改写为

$$I_\nu(B) = I_\nu(A)e^{-\tau_0} + \int_0^{\tau_0} e^{-\tau} S_\nu(\tau) d\tau. \tag{3.20}$$

此即辐射转移方程的形式解. 若介质是一个有限厚的一层，$I_\nu(A)$ 代表入射到介质表面时的初始强度，记为 I_ν^{in}，而 B 点是介质外表面上一点，则 $I_\nu(B)$ 代表射出介质时的强度，记为 I_ν^{out}，则有

$$I_\nu^{out} = I_\nu^{in} e^{-\tau_0} + \int_0^{\tau_0} e^{-\tau} S_\nu(\tau) d\tau. \tag{3.21}$$

不难理解(3.20)式或(3.21)式中两项的物理意义，为此，可以考虑几个特例：

1. 介质只吸收，不辐射(即 $k_\nu \neq 0$，但 $j_\nu=0$). 这时 $S_\nu=j_\nu/k_\nu=0$，所以(3.18)式成为

$$I_\nu^{out} = I_\nu^{in} e^{-\tau_0},$$

其中 $\tau_0 = \int_0^L k_\nu ds$，$L$ 是吸收云厚度. 上式即熟知的辐射通过吸收介质时的指数衰减定律. 特别是当介质均匀时，$\tau_0=k_\nu L$，故

$$I_\nu^{out} = I_\nu^{in} e^{-k_\nu L}.$$

2. 没有初始的入射，即 $I_\nu^{in}=0$，但介质除有吸收之外，它本身也辐射，即 k_ν，j_ν 皆不为零. 此时(3.18)式只保留第二项

$$I_\nu^{out} = \int_0^{\tau_0} e^{-\tau} S_\nu(\tau) d\tau, \tag{3.22}$$

对于均匀介质，上式可化为

$$I_\nu^{out} = \int_0^L j_\nu e^{-k_\nu (L-s')} ds'. \tag{3.23}$$

(3.23)式的意义是显然的，它表示对一个厚度为 L 的“发光”介质，射出点强度应当是沿着射线方向上的介质中各点所产生的沿

该方向的辐射的总和. 但由于介质的吸收作用,使得来自与射出点距离为 $L-s'$ 的一点的辐射应减弱为 $e^{-k_\nu(L-s')}$ 倍. 对一个横截面为单位面积、长度为 L 的介质气体柱,无需求解转移方程(3.19),就可直接写出(3.23),得到该气体柱底面出射的总强度.

由此可见,一般形式的解(3.21)表明,出射强度是由两部分组成,第一项是入射束对出射强度的贡献(由于介质吸收而乘以因子 $e^{-k_\nu L}$),第二项是由于沿途各点介质本身辐射的贡献.

现在讨论(3.21)或(3.22)的形式解的一个重要的应用. 假如介质处在局部热平衡(LTE)情况下,则基尔霍夫定律(3.12)式将成立,即

$$S_\nu = j_\nu/k_\nu = B_\nu(T),$$

其中,

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

于是(3.22)式成为

$$I_\nu^{\text{out}} = \int_0^{\tau_0} e^{-\tau} B_\nu(T) d\tau.$$

如果是均匀介质,温度 T 和 k_ν 是常量,则有

$$I_\nu^{\text{out}} = B_\nu(T)(1-e^{-k_\nu L}). \tag{3.24}$$

由(3.24)式可见,一个处于温度 T 的热平衡的均匀介质层,如果对任意频率 ν 而言,其光深 $\tau_\nu = k_\nu L \gtrsim 1$(光学厚),则有

$$I_\nu^{\text{out}} \simeq B_\nu(T). \tag{3.25}$$

(3.25)式说明,假如介质在全波段都是光学厚的,将得到黑体谱,$B_\nu(T)$ 即绝对黑体的辐射强度.

当 $\tau_\nu \ll 1$,即在光学薄情况下,则有

$$I_\nu^{\text{out}} \simeq k_\nu L B_\nu(T) = j_\nu L. \tag{3.26}$$

因此,在光学薄的情况下,出来的辐射就不像黑体谱了. 只有当介质既处在热平衡,又是光学厚情况下,才可得到黑体谱. 原因是只有在光学厚时,辐射场才有可能与热平衡介质充分作用,与介质达到共同热平衡态.

注意，对于各种非热辐射过程，源函数不能简单用 $B_\nu(T)$ 代替，只能具体求出 j_ν, k_ν 后得到.

§3.3 产生发射线和吸收线的条件

本节讨论一个重要问题，即对连续谱光学薄的介质（这是产生谱线的必要条件），什么情况下有原子发射线，什么情况是吸收线.

给定的一条原子谱线究竟是以吸收线形式还是以发射线形式出现，主要取决于谱线和近邻的连续谱区的辐射强度差. 把线心频率处的强度记为 I_L，则线心处的辐射转移方程是

$$\frac{dI_L}{ds} = -k_L I_L - k_c I_L + j_L + j_c,$$

其解是

$$I_L = I_{(0)} e^{-\tau(0,s)} + \int_0^s (j_L + j_c) e^{-\tau(s',s)} ds',$$

其中 $I_{(0)}$ 是背景源的强度. 以上两式中，脚标 ν 一概略去，只需记住 I_L 就是线心频率处的强度. 式中光深由线吸收系数 k_L 和连续谱吸收 k_c 共同决定，

$$\tau = \tau_L - \tau_c.$$

在谱线附近的连续区中，$k_L \simeq 0, j_L = 0$，所以有

$$\frac{dI_c}{ds} = -k_c I_c + j_c,$$

求解得

$$I_c = I_{(0)} e^{-\tau_c(0,s)} + \int_0^s j_c e^{-\tau_c(s',s)} ds'. \tag{3.27}$$

因此，谱线强度和近邻连续区的强度差是

$$I_L - I_c = I_{(0)}[e^{-\tau(0,s)} - e^{-\tau_c(0,s)}] + \int_0^s j_L e^{-\tau(s',s)} ds' - \int_0^s j_c [e^{-\tau_c(s',s)} - e^{-\tau(s',s)}] ds'. \tag{3.28}$$

如果介质对连续谱是光学薄的，即连续谱光深 $\tau_c \ll 1$，并且几

乎在所有情况下，谱线吸收系数 τ_L 总是远高于连续谱吸收系数，即 $\tau_L \gg \tau_c$，所以可在上式中近似令 $\tau_c=0$，得到

$$I_L - I_c = - I_{(0)}(1 - e^{-\tau_L}) + S_{(0,s)}, \tag{3.29}$$

其中

$$S_{(0,s)} = \int_0^s j_L e^{-\tau_L(s')} ds' - \int_0^s j_c (1 - e^{-\tau_L(s')}) ds'.$$

假如介质是均匀的，而且处于局部热平衡状态，

$$\frac{j_L}{k_L} \simeq B_L(T),$$

则

$$I_L - I_c = - I_{(0)}(1 - e^{-\tau_L}) + B_L(T)(1 - e^{-\tau_L}) - \tilde{I}_c(1 - e^{-\bar{\tau}_L}). \tag{3.30}$$

式中 $B_L(T)$ 是普朗克函数，$\tilde{I}_c = \int_0^s j_c ds'$ 是介质本身所产生的即不计及初始入射 $I_{(0)}$ 的连续区辐射强度. $\bar{\tau}_L$ 是线心处的平均光深，定义为

$$e^{-\bar{\tau}_L} = \frac{\int_0^s j_c e^{-\tau_L(s',s)} ds'}{\int_0^s j_c ds'}.$$

注意，$\bar{\tau}_L$ 和 τ_L 是同数量级的，因此由(3.30)式得出结论，当

$$B_L(T) > I_{(0)} + \tilde{I}_c,$$

则有 $I_L - I_c > 0$，即出现的是发射谱线. 但由(3.27)式可见，对于光学薄的介质(在连续区)，由于 $\tau_c \simeq 0$，故 $I_c \simeq I_{(0)} + \tilde{I}_c$，所以上述条件可简单写为

$$B_L(T) > I_c. \tag{3.31}$$

上述情况表明，对于一个处在局部热平衡状态的介质，假如它在连续谱区是光学薄的($\tau_c \simeq 0$)，并且线心处的普朗克函数 $B_L(T)$ 的值超过近邻连续区的辐射强度 I_c，则介质产生发射谱线. 而当

$$B_L(T) < I_{(0)} + \tilde{I}_c = I_c \tag{3.31'}$$

时，就将出现吸收线.在有强的连续谱背景源时，$I_{(0)}$就很大，恒星光球上方的大气包层所处的情况就是一个实例.

注意以上关于发射线和吸收线产生条件的讨论，并不要求介质在线心频率处也是光学薄的，因为即使(3.30)中谱线光深 $\tau_L \gg 1$，谱线产生条件(3.31)式和(3.31′)式依然适用.要产生谱线，只要求介质对连续谱是光学薄即可，但允许 $\tau_L \gg 1$.假如气体介质在所有频率位置上是光学薄的，即不只是 $\tau_c \simeq 0$，且 $\tau_L \simeq 0$，并且假定没有背景光源存在，则谱线发射强度就是

$$I_L \simeq \int_0^s j_L ds' + \int_0^s j_c ds'. \tag{3.32}$$

§3.4 线辐射的吸收系数及发射线强度

由(3.26)式可见，要计算一个光学薄的热平衡介质产生的谱线强度，也可以从计算谱线中心处的吸收系数 k_ν 入手.设发射线来自原子、分子的高能级 E_m 到低能级 E_n 的跃迁，

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n.$$

假如上下能级粒子数密度分别是 N_m 和 N_n，按照定义，该频率的线吸收系数 k_ν 应为(用记号 ν 代替 ν_{mn})

$$k_\nu = \frac{-dI_\nu}{I_\nu ds}.$$

为求 $-dI_\nu$，试考虑一个单位底面积长为 ds 的气体柱，在此情况下，气体的净吸收应为实际的感应吸收与感应发射之差，所以(见第二章)

$$-dI_\nu = (N_n B_{nm} I_\nu - N_m B_{mn} I_\nu)\frac{1}{4\pi} ds h\nu_{mn}.$$

注意，式中 B_{mn}，B_{nm} 为对方向平均的爱因斯坦系数，当然以下关系仍成立：

$$B_{nm} = \frac{g_m}{g_n} B_{mn}, \qquad A_{mn}/B_{mn} = \frac{2h\nu_{mn}^3}{c^2}.$$

因此，由

$$k_\nu = \frac{-dI_\nu}{I_\nu ds} = \left(\frac{h\nu_{mn}}{4\pi}\right)(N_n B_{nm} - N_m B_{mn})$$

得到

$$k_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu_{mn}^2}\left(N_n \frac{g_m}{g_n} - N_m\right) A_{mn},$$

或者

$$k_\nu = \frac{c^2 N_n g_m}{8\pi\nu_{mn}^2 g_n}\left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right) A_{mn}. \tag{3.33}$$

在文献中也常常不用自发跃迁概率 A_{mn}，而改用振子强度 f_{nm} 来表示 k_ν. 第二章已给出对于 $n \to m$ 跃迁的吸收振子强度 f_{nm}和自发跃迁概率 A_{mn}之间有着关系式

$$f_{nm} = \frac{g_m}{g_n} \frac{m_0 c^3}{8\pi^2 e^2 \nu_{mn}^2} A_{mn},$$

式中 m_0 是电子质量. 因此，(3.33)式亦可写成

$$k_\nu = \frac{\pi e^2}{m_0 c} f_{nm} N_n \left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right). \tag{3.34}$$

以上推导中，忽略了谱线的各种展宽效应，而认为吸收就是发生在 $\nu = \nu_{mn}$ 的确定频率处，但谱线展宽效应无疑会影响 k_ν 值(在这些展宽机制中，最主要的是多普勒效应). 若要考虑这一修正，只需将(3.33)和(3.34)式形式地乘以一个归一化的谱线强度分布函数 $\varphi_{mn}(\nu)$，因此，

$$k_\nu = \frac{c^2 N_n g_m}{8\pi\nu^2 g_n}\left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right) A_{mn}\varphi_{mn}(\nu), \tag{3.35}$$

或者用振子强度 f_{nm}表示为

$$k_\nu = \frac{\pi e^2}{m_0 c} f_{nm} N_n \left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right)\varphi_{mn}(\nu), \tag{3.36}$$

其中 $\varphi_{mn}(\nu)$是归一化的[$\varphi_{mn}(\nu)$也称做谱线形状因子].

$$\int_0^\infty \varphi_{mn}(\nu) d\nu = 1. \tag{3.37}$$

(3.35)和(3.36)说明，谱线吸收不只发生在频率 ν_{mn}处，而是在 ν_{mn}附近有一个分布，并且

$$\int_0^{\infty} k_\nu d\nu = \frac{c^2 N_n g_m}{8\pi\nu_{mn}^2 g_n} A_{mn}\left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right),$$

$$\int_0^{\infty} k_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m_0 c} f_{mn} N_n \left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right).$$

不难由(3.35)或(3.36)式求出谱线线心处的吸收系数. 假定谱线两个半极大值间的全宽度记为 $\Delta\nu_D$，利用归一化条件(3.37)可以近似得到

$$\int_0^{\infty} \varphi_{mn}(\nu) d\nu \simeq \varphi_{mn}(\nu_{mn}) \Delta\nu_D,$$

故

$$\varphi_{mn}(\nu_{mn}) \simeq \frac{1}{\Delta\nu_D}.$$

代入(3.35)和(3.36)式，得到线心的吸收系数为

$$k_L = k_{\nu_{mn}} = \frac{c^2 N_n g_m}{8\pi\nu_{mn}^2 g_n \Delta\nu_D}\left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right) A_{mn}, \qquad (3.38)$$

$$k_L = k_{\nu_{mn}} = \frac{\pi e^2}{m_0 c} f_{mn} \frac{N_n}{\Delta\nu_D}\left(1 - \frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right). \qquad (3.39)$$

在局部热平衡条件下，粒子数具有玻耳兹曼分布，

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{E_m - E_n}{kT}} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{h\nu_{mn}}{kT}}.$$

因此(3.38)式成为

$$k_L = k_{\nu_{mn}}(\mathrm{LTE}) = \frac{\pi e^2}{m_0 c} f_{mn} \frac{N_n}{\Delta\nu_D}\left[1 - e^{-\frac{h\nu_{mn}}{kT}}\right]. \qquad (3.40)$$

有了线心吸收系数，就可以求出光学薄气体在局部热平衡下的谱线辐射强度. 对于一个厚度为 L 的均匀气体，线心处的光深

$$\begin{aligned} \tau_{\nu_{mn}} &= \tau_L + \tau_c \simeq \tau_L = L \cdot k_L \\ &= \frac{\pi e^2}{m_0 c} L f_{mn} \frac{N_n}{\Delta\nu_D}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{mn}}{kT}\right)\right]. \end{aligned}$$

根据(3.26)式，只要 $\tau_{\nu_{mn}} \ll 1$(光学薄)，则射出气体时的频率为 ν_{mn} 处的谱线中心强度为

$$I_L = I_{\nu_{mn}} = B_L(T) \frac{\pi e^2}{m_0 c} f_{mn} \frac{1}{\Delta\nu_D}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{mn}}{kT}\right)\right] L N_n$$

(3.41)

其中黑体亮度为(见(3.12)式)

$$B_L(T) = \frac{2h\nu_{mn}^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu_{mn}/kT} - 1}.$$

因此，在局部热平衡条件下，只要知道了 f_{nm}，且测量了线心强度 $I_{\nu_{mn}} = I_L$ 及线宽 $\Delta\nu_D$，还可由上式推得气体的"柱密度"LN_n. 作为练习，读者不妨验证，(3.41)式经化简，就是常规线强公式：

$$I_L = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\Delta\nu_D} N_m A_{mn} h\nu_{mn} L = j_L L.$$

以上关于线辐射的吸收系数的计算，只涉及到两个量子化能级 E_n 及 E_m. 实际上对于连续辐射谱的吸收系数，计算是完全类似的. 不同的是现在涉及到能量连续分布的态. 自由-自由跃迁过程产生的吸收就是如此. 假定介质中自由电子由动量为 $\boldsymbol{p}$ 的初态到 $\boldsymbol{p}'$ 的终态时吸收的光子能量为 $h\nu$，则 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}'$ 间关系由能量守恒和动量守恒给出，且 $p'^2 > p^2$. 但是请注意，一个真正的自由电子是不可能吸收(或发射)光子的，即不可能在此过程中同时满足动量和能量守恒. 这里说的"自由"电子对光子的吸收和发射，是需要有其它粒子(例如正离子)在场的，详细情形请见韧致辐射一章.

把感应吸收系数和感应发射系数分别记为 $\eta_a(\nu,\boldsymbol{p})$ 及 $\eta_i(\nu,\boldsymbol{p}')$，$\eta_a$，$\eta_i$ 分别和前面的微分吸收系数及微分发射系数 b_{nm} 和 b_{mn} 类似，即

$$dp_a = \eta_a(\nu,\boldsymbol{p},\Omega) I_\nu d\Omega,$$

$$dp_i = \eta_i(\nu,\boldsymbol{p}',\Omega) I_\nu d\Omega.$$

如果处在态 $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} + d\boldsymbol{p}$ 的电子数密度是 $N(\boldsymbol{p})d^3\boldsymbol{p}$，处在 $\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}' + d\boldsymbol{p}'$ 的自由电子数密度是 $N(\boldsymbol{p}')d^3\boldsymbol{p}'$，则与推导(3.33)式类似，应有

$$k_\nu = \left[\int \eta_a(\nu,\boldsymbol{p},\Omega) N(\boldsymbol{p}) d^3\boldsymbol{p} - \int \eta_i(\nu,\boldsymbol{p}',\Omega) N(\boldsymbol{p}') d^3\boldsymbol{p}'\right] h\nu,$$

式中积分是由于考虑到电子的各种动量值 $\boldsymbol{p}$ 的初态都有可能吸收频率为 ν 的辐射.

如果把动量 $\boldsymbol{p}'$ 的电子沿 $d\Omega$ 方向产生的频率为 ν 的自发辐射

功率记为$\frac{dp(\nu,\boldsymbol{p}')}{d\Omega}d\Omega$，则自发辐射概率就是

$$\frac{1}{h\nu}\frac{dp(\nu,\boldsymbol{p}')}{d\Omega}d\Omega.$$

η_a,η_i 与自发辐射概率之间的关系与爱因斯坦微分系数 a_{mn},b_{mn},b_{nm} 类似，即有

$$\frac{1}{h\nu}\frac{dp(\nu,\boldsymbol{p}')}{d\Omega}=\left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\eta_i(\nu,\boldsymbol{p}'\Omega),$$

$$\eta_a(\nu,\boldsymbol{p})d^3\boldsymbol{p}=\eta_i(\nu,\boldsymbol{p}')d^3\boldsymbol{p}',$$

故有

$$k_\nu=\frac{c^2}{2h\nu^3}\int\frac{dp(\nu,\boldsymbol{p}')}{d\Omega}[N(\boldsymbol{p})-N(\boldsymbol{p}')]d^3\boldsymbol{p}'. \qquad (3.42)$$

在经典极限下，光子能量远小于电子动能，即

$$\Delta p=|\Delta\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}|=\frac{h\nu}{c}$$

是一个小量，可以按小量 $\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$ 展开被积表达式. 假如电子速度分布是各向同性的，则有

$$N(p')\simeq N(p)+\frac{\partial N}{\partial p}\Delta p=N(p)+\frac{h\nu}{c}\frac{\partial N}{\partial p},$$

从而

$$k_\nu=-\frac{c}{2\nu^2}\int\frac{dp(\nu,\boldsymbol{p})}{d\Omega}\frac{\partial N}{\partial p}d^3\boldsymbol{p}, \qquad (3.43)$$

式中的负号是由于在通常的电子速度分布下(例如热平衡下的电子气具有麦氏分布)，总有$\frac{\partial N}{\partial p}<0$.

§3.5 处理谱线辐射转移的近似方法——逃逸概率法 (Sobolev 近似)

上节(3.41)式表示在气体极为稀薄，以致谱线线心处也是光学薄($\tau_L=k_L L\ll1$)情况下的谱线出射强度. 但天体物理中，常遇到的情况是：尽管气体对连续谱光薄，但对发射线却是光厚，甚至线心处有 $\tau_L\gg1$，此时仍然可产生发射线(参照§3.3最后一段的讨论)，但此时计算发射线的出射强度时，必须考虑谱线的辐射转移.

对于发射线的辐射转移，求其出射强度$I_{\nu_{mn}}$（或光度$\mathscr{L}_{\nu_{mn}}$）的更常用的简便近似方法是逃逸概率法，而不是解辐射转移方程. 其基本想法是：谱线的辐射转移是由介质对发射线的共振吸收($k\nu_{mn}\neq 0$)造成的. 共振吸收使得相当多的谱线光子在逃出介质表面之前被囚禁，最终转化为热能或其它频率光子能量，使得源内谱线光子的总发射量大于源表面的出射量，因此可以把吸收的作用说成是减少了谱线光子的逃逸概率. 可将这一逃逸概率用吸收系数k_ν表示出来，从而求出谱线的出射光度，——它等于源内谱线光子单位时间总发射量乘以光子从源表面的逃逸概率，这一近似方法比解辐射转移方程简便易行.

以下举两个重要例子，说明如何由谱线共振吸收系数$k_{\nu_{mn}}$计算谱线光子逃逸概率.

1. 均匀发光球，半径R，线吸收系数k_ν，谱线发射系数j_ν都已给定(以下简记为k, j). 试求出射线强度I或谱线出射总光度$\mathscr{L}$(脚标ν_{mn}暂略).

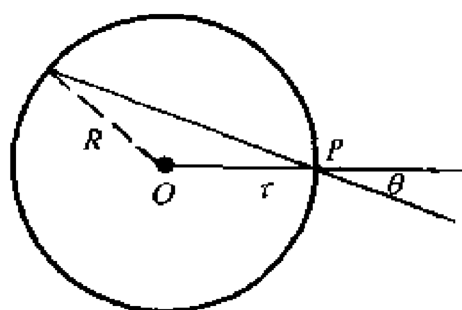


图 3.5

解：令$\tau\equiv kR$，将τ叫做球状发光介质的光学半径，现任意地考查一束和球表面某点P的法线成θ角的辐射束. 显见，沿此方向的光深是$\tau_\theta=2\tau\cos\theta$，因此，按转移方程的形式解，出射点$P$处该辐射束的强度是

$$I(\theta)=\int_0^{\tau_\theta} je^{-\tau'}ds'=\frac{j}{k}(1-e^{-2\tau\cos\theta}),$$

公式中s'是沿射线方向的路程，$\tau'=ks'$是光深. 故在P点处向外辐射通量是

$$\pi F=2\pi\int_0^{\pi/2} I(\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{\pi j}{2k\tau^2}[2\tau^2-1+(2\tau+1)e^{-2\tau}], \quad (3.44)$$

因此球面出射光度则为

$$\mathscr{L} = (\pi F)4\pi R^2. \tag{3.45}$$

(3.45)式已考虑了共振吸收 k 后的表面出射量.

为了计算每个线光子的逃逸概率,现设想介质球是完全透明的,无吸收,此时穿过 P 点的总通量为

$$\pi F(0\,\text{吸收}) = \frac{4\pi j\,\frac{4\pi}{3}R^3}{4\pi R^2} = \frac{4\pi}{3}jR,$$

可见每个线光子的平均逃逸概率是

$$P_{esc}(\tau) = \frac{\pi F(\text{真实})}{\pi F(0\,\text{吸收})} = \frac{3}{4\tau}\left[1 - \frac{1}{2\tau^2} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\tau^2}\right)e^{-2\tau}\right] \tag{3.46}$$

显见 $\tau \to 0$,则 $P \to 1$;当 $\tau \gg 1$,则 $P \to \frac{3}{4\tau} \simeq \frac{1}{\tau}$. 当 $\tau \gg 1$ 时,应当认为逃出表面的光子实际上是从发光球表面厚度为 $l \simeq 1/k$ 的薄壳层中出来的. 球内深处的谱线光子都由于共振吸收,再发射,再吸收…而长期囚禁于球内,最终会转化为热能或其它频率之谱线逸出.

本章开头说过的光子走过光深 τ 而不被吸收的概率是 $P = e^{-\tau}$,不要把它和上面(3.46)式中的不吸收概率 P_{esc} 混淆. (3.46)式中的 $\tau = kR$ 是描写介质球整体性质的一个特征量(光学半径),而(3.46)式中的逃逸概率(不被吸收概率)是个平均概念,指的是平均说来,球内一个光子不被吸收而逃出球表面的逃逸概率,而不问这个谱线光子是产生在球内哪一点,向哪个方向飞行.

有了逃逸概率 P_{esc} 即可求出射光度 $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L}_{\nu_{mn}} = \frac{4\pi}{3}R^3(4\pi j)P_{esc}. \tag{3.47}$$

这相当于说,吸收的作用在于使**有效的**谱线发射系数看起来不是 j,而是

$$j^{eff} = jP_{esc}. \tag{3.48}$$

计算出射光度时,由于吸收对辐射转移的影响已体现在有效发射系数 j^{eff} 中(即体现于逃逸概率 P_{esc} 中),故在计算谱线出射光度 $\mathscr{L}_\nu$

时，介质球应当形式上看成完全透明，从而写出(3.47)式.

2. 均匀平面平行层气体，厚 L，共振吸收系数 k，发射系数 j，求谱线出射强度 I^{out}.

解：仿照前例，定义 $\tau \equiv kL$ 为平行层的光学厚度，可以求出层内任一谱线光子由表面逃出的平均逃逸概率是

$$P_{esc}(\tau) = \frac{1}{\tau}[1 - \exp(-\tau)]. \tag{3.49}$$

再次看到，当 $\tau \ll 1$ 时，$P_{esc} \simeq 1$. 当 $\tau \gg 1$，$P_{esc} \simeq \frac{1}{\tau}$. 同样有效发射系数为

$$j^{eff} = jP_{esc}(\tau). \tag{3.50}$$

对于谱线的自发跃迁辐射，$j \propto A_{ul}$，所以也可以说，吸收的效果是将自发跃迁系数 A_{ul} 用"有效自发跃迁系数"$A_{ul}^{eff} = A_{ul}P_{esc}$ 代换. 由于吸收对辐射转移的影响已经体现在代换 $j \rightarrow j^{eff} \simeq j/\tau$ 或者代换 $A_{ul} \rightarrow A_{ul}^{eff} \simeq A_{ul}/\tau$ 中了. 所以在计算出射强度 I^{out} 时，对介质平行层，不能再次考虑其吸收作用，而应形式地看成光学薄介质层. 从而出射强度为

$$I^{out} = j^{eff}L = jP_{esc}L = \frac{j}{\tau}L.$$

在以上两例中，我们得出一个印象，对于吸收介质，无论其几何位形(球或平面层)谱线光子的逃逸概率大致都等于 $P_{esc}(\tau) \simeq 1/\tau$ (只要 $\tau \gg 1$).

举一个实际例子说明如何用逃逸概率法处理谱线的辐射转移问题，这就是著名的超新星 SN1987A 的膨胀包层的谱线辐射问题. 超新星 SN1987A 爆发后不久，至多几天后，抛出的气体包层就处于匀速运动状态，此后的任一时刻 t，径向速度为 v 的气体成分到中心的距离即可近似表为 $r \simeq vt$，不同速度气体处于不同半径处. 整个气体包层具有一个径向速度梯度分布，而且从 $v_{min} \simeq 0$ 到 $v_{max} \simeq 2500$km/s 范围的球体内，物质密度近似均匀. 这就是谱线的主要发射球区的大致情况. 至少在爆发早期的一二年内，发射球内气体密度比较大，对谱线光厚. 球区中任一处原子发射的谱线光

子在逃出发射球(气体包层)表面前有可能遭到共振吸收，因此求谱线出射光度 $\mathscr{L}_{\nu_{mn}}$ 时，必须考虑辐射转移. 而处理谱线的辐射转移问题，以逃逸概率法最为简便. 为此，首先求共振吸收的光学厚度 $\tau=kL$.

已经知道产生谱线共振吸收的前提就是线光子能量 $h\nu_{mn}$ 恰等于吸收原子相应的一对能级之差，$h\nu_{mn}=E_m-E_n$，因此，不难理解发射球区中速度梯度的存在使得共振吸收光深大为减小，即气体包层对谱线光子变得比较透明. 由于径向速度随半径的增加而增大，相对于任何一个吸收原子而言，从半径较小的深处飞出的谱线光子都发生了多普勒红移，故光子能量变为 $h\nu'<h\nu=E_m-E_n$，使得共振吸收成为不可能. 但又不能把气体说成对谱线绝对透明，原因在于气体还有热运动，$v_{th}\neq 0$. 热运动使发射的谱线光子有一多普勒展宽，数值为 $\Delta\nu_D=\nu_{mn}v_{th}/c$，式中 $v_{th}=\sqrt{\dfrac{2kT}{m_e}}$. 展宽的发射线就可能与外层吸收原子能级差 E_m-E_n 相匹配，使共振吸收重新成为可能.

对处于任一半径 r 处的发光原子来说，它发射的谱线光子只可能被处在 r—$r+\delta r$ 薄层中的原子吸收，因为这些吸收原子的径向速度在 v—$v+\delta v$ 之间，十分接近发光原子的热速度弥散 v_{th}，$\delta v\simeq v_{th}$，故吸收薄层的厚度 δr 可估计如下：

$$\frac{\delta r}{r}=\frac{\delta v\cdot t}{v\cdot t}=\frac{\delta v}{v}\simeq\frac{v_{th}}{v}.$$

该薄层的吸收光深则为(参见(3.36)式，略去其中感应发射)

$$\tau_L(\nu)=k_L(\nu)\delta r\simeq N_n\sigma(\nu)\delta r=N_n\frac{\pi e^2}{m_e c}f_{nm}\varphi(\delta\nu)\delta r.$$

$\varphi(\delta\nu)=\varphi(\nu-\nu_{mn})$是谱线轮廓因子，它在整个谱线轮廓内的平均值是 $\bar{\varphi}(\delta\nu)=\dfrac{1}{\Delta\nu_D}$. 因此平均光深为

$$\bar{\tau}=N_n\frac{\pi e^2}{m_e c}f_{nm}\frac{1}{\Delta\nu_D}\delta r.$$

将 $\Delta\nu_D=\nu_{mn}\frac{v_{\text{th}}}{c}$ 以及 $\delta r=r\frac{v_{\text{th}}}{v}$ 代人上式，并注意到 $\delta r/\Delta\nu_D=(r/v)/(\nu_{mn}/c)=\lambda_{mn}t$，故得

$$\bar{\tau}=N_n\frac{\pi e^2}{m_e c}f_{nm}\lambda_{mn}t.$$

严格地说，应该加上感应发射对共振吸收系数 k_L 的负的贡献，故完整的光深公式当为

$$\bar{\tau}=\frac{\pi e^2}{m_e c}f_{nm}\lambda_{mn}tN_n\left(1-\frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right),\tag{3.51}$$

或者

$$\bar{\tau}=\frac{\lambda_{mn}^3 g_m A_{mn}}{8\pi g_n}tN_n\left(1-\frac{g_n N_m}{g_m N_n}\right),\tag{3.52}$$

其中 N_m, N_n 分别为谱线上下能级的粒子数布居，g_m、g_n 分别为上，下能级简并度.

显然，均匀膨胀中，下能级 n 的密度 $N_n\propto t^{-3}$，故气体包层的共振吸收光深是

$$\bar{\tau}\propto t^{-2}.$$

$\bar{\tau}$ 将随年龄快速减小，最终变为光薄. 有了光深，即求得谱线光子逃逸概率

$$P_{\text{esc}}=\frac{1}{\bar{\tau}}(1-e^{-\bar{\tau}})\simeq\frac{1}{\bar{\tau}}\qquad(\text{当 }\bar{\tau}\gg 1),\tag{3.53}$$

从而求得有效自发跃迁概率为

$$A_{mn}^{\text{eff}}=P_{\text{esc}}A_{mn}\simeq A_{mn}/\bar{\tau}\ll A_{mn}.\tag{3.54}$$

可见当谱线光深 $\bar{\tau}$ 足够大时，该谱线表观上由允许线变成了“禁线”.

有效谱线发射系数为

$$j_{mn}^{\text{eff}}\simeq\frac{j_{mn}}{\bar{\tau}}=\frac{N_m A_{mn}h\nu_{mn}}{\bar{\tau}}\ll j_{mn}\qquad(\text{当 }\bar{\tau}\gg 1),\tag{3.55}$$

最后，谱线出射光度为

$$\mathscr{L}_{\nu_{mn}}=\frac{4\pi}{3}R^3 j_{mn}^{\text{eff}}\simeq\frac{4\pi}{3}(v_{\max}t)^3 j_{mn}^{\text{eff}}.\tag{3.56}$$

由上可见，逃逸概率法处理谱线辐射转移非常简便且物理概念清晰，当然，要求出最后结果即出射光度 $\mathscr{L}$，还需先求粒子能级布居 N_m，N_n 等。

如果谱线吸收发生于原子基态和第一激发态之间（例如H原子Ly α 吸收产生由能级1到2的跃迁），则这种特定的共振吸收又常称做共振散射，因为此时原子进入高激发态后仅停留～10^{-8}s即辐射跃迁回到基态，再发射光子，类似于散射过程. 谱线光子的多次"散射"将造成光子在气体介质中的"囚禁"(line trapping)，致使光子难于逃离表面，造成出射强度下降. 顺便指出，"囚禁"还会有另一个后果——使粒子数能级布居会在较低电子密度 n_e 下提前达到玻耳兹曼热平衡分布. 因为达到分布 $N_m/N_n=(g_m/g_n)\cdot\exp\left(-\frac{E_m-E_n}{kT}\right)$ 的前提条件是气体中电子密度足够大，使碰撞跃迁为主，即当碰撞频繁到使碰撞跃迁($m\rightarrow n$)远超过辐射跃迁 A_{mn} 时，才会有热平衡分布. 已知在谱线吸收光深 $\bar{\tau}\gg 1$ 时，将使有效辐射跃迁概率 $A_{mn}^{\mathrm{eff}}\ll A_{mn}$，甚至使谱线成为表观"禁线"，从而在较低的电子密度下形成热平衡能级布居.

§3.6 （弹性）散射对辐射转移的影响，随机游动近似

前面对辐射转移的讨论，忽略了光子遭散射的可能性. 介质散射同样会造成光传播中强度的变化. 最重要的过程是自由电子对光子的散射，以及原子对能量相应于基态和第一激发态能间隔的特殊的谱线光子的共振吸收和再发射. 上节已指出，这等效于原子对谱线光子的弹性散射（即频率不变），称为共振散射.

本节只讨论自由电子-光子纯散射对辐射转移过程的贡献，先不计介质的吸收和发射，以使散射效应突出. 为简单，先讨论弹性散射（也有人叫单色散射，相干散射），即散射光子频率等于原有入射频率，$h\nu'=h\nu_i$. 以后的几节中，还要讨论电子-光子间的非弹性散射，即所谓的康普顿化过程. 此外，本节中近似假定散射是各向同性的.

和前面介质的吸收和发射类似，为了描写介质的散射性质，我们引进两个类似的物理量：一、散射"吸收"系数 k_ν^s. 当辐射穿过这一纯散射介质时，沿途强度会减少，穿过元路程 ds 后强度的减少量应为

$$- dI_\nu = k_\nu^s I_\nu ds, \tag{3.57}$$

系数 k_ν^s 即为散射"吸收"系数. 虽然它和介质的真实吸收 k_ν 有本质不同（散射光子能量，数目都不减少），但 k_ν^s 描写了散射造成的强度减弱. 二、散射"发射"系数 j_ν^s（各向同性散射情况）. 散射光的介质形式上像是在"发光"，故引入散射"发射"系数 j_ν^s. 对于纯散射介质，"发射"量自然和"吸收"量相等，故有

$$j_\nu^s = \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} k_\nu^s I_\nu(\Omega) d\Omega,$$

在各向同性吸收情况下，有

$$j_\nu^s = k_\nu^s\left(\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\Omega) d\Omega\right), \tag{3.58}$$

或者写成

$$j_\nu^s = k_\nu^s J_\nu, \tag{3.59}$$

式中 J_ν 表示该处的方向平均辐射强度

$$J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} I_\nu(\Omega) d\Omega. \tag{3.60}$$

这样看来，纯散射过程中，辐射转移方程当为

$$\frac{dI_\nu}{ds} = - k_\nu^s I_\nu + j_\nu^s = - k_\nu^s (I_\nu - J_\nu). \tag{3.61}$$

但实际上这个由散射效应造成的辐射转移过程方程难于求解，因为它是关于待求量 I_ν 的积分微分方程（见(3.60)式和(3.61)式），一种可行的方法是采用爱丁顿近似，此处不做介绍.

由于求解的麻烦，故在散射问题中，经常避开求解辐射转移方程(3.61)而用概率方法，即随机游动近似方法做半定量讨论. 事实上，辐射转移中，许多问题都可翻成概率语言，如"强度指数衰减"就可以说成"一个光子穿过光深 τ_ν 而不被吸收的概率是 $e^{-\tau_\nu}$"；"各向同性散射"可说成"一个光子以等概率向各个方向散射"；介质的

吸收系数可说是"一个光子不受介质吸收的平均自由程为 $\overline{L}=1/k_\nu$",等等.

特别是,一个光子在介质中的散射过程可看成光子的随机游动,采用数学中的随机游动近似描写.

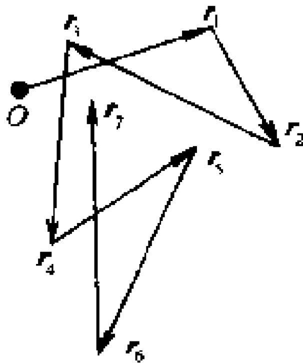


图 3.6

若一个光子在一系列散射动作中,相邻两次散射之间的自由位移依次记为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \cdots \boldsymbol{r}_N$,则 N 次散射后,总位移(见图 3.6)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \cdots + \boldsymbol{r}_N.$$

显然,要追问 N 次散射后偏离原来位置 O 点的距离 R,不能对上述求和式求平均,因为这个平均值是零(矢量 $\boldsymbol{R}$ 的平均必为零,因为大散射数 N 下,对于每个位移 $\boldsymbol{r}_i$ 会有对应的一个 $-\boldsymbol{r}_i$ 位移),所以改求上述和式的平方的平均值. 均方位移是

$$l_*^2 \equiv \langle \boldsymbol{R}^2 \rangle = \langle \boldsymbol{r}_1^2 \rangle + \langle \boldsymbol{r}_2^2 \rangle + \langle \boldsymbol{r}_3^2 \rangle + \cdots + \langle \boldsymbol{r}_n^2 \rangle + 2\langle \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \rangle + 2\langle \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3 \rangle + \cdots$$

这里说的"平均"是指对大量光子的平均. 显见有 $\langle \boldsymbol{r}_1^2 \rangle = \langle \boldsymbol{r}_2^2 \rangle = \cdots = \langle \boldsymbol{r}_n^2 \rangle = l^2$. l 是光子平均自由程,而 $\langle \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3 \rangle = \cdots = 0$,因为 $\langle \cos\theta \rangle = 0$. 因而在 N 次散射后,光子的均方偏离是

$$l_*^2 = N l^2, \tag{3.62}$$

或者光子均方根位移是

$$l_* = \sqrt{N} l. \tag{3.63}$$

可见位移 l_* 和散射次数 N 并无正比关系. 这是由各次散射方向杂乱无章造成的.

可以用(3.62)式估计光子在尺寸为 L 的有限大介质中的平均散射数. 不管光子在介质中何处产生,只要最终逃出介质,平均来说,量级上应有 $l_* \simeq L$,可见介质中光子的典型散射次数当为 $N = l_*^2/l^2 \simeq L^2/l^2$. 已知光子平均自由程是 $l = 1/k_\nu^s$,所以散射次数为

$$N \simeq L^2 k_\nu^{s2} = (\tau^s)^2 \qquad (当 \tau^s \gg 1). \tag{3.64}$$

但当散射光深很小时($\tau^s \ll 1$)，则光子穿过 τ^s 而不被散射的概率是 $e^{-\tau^s}$，被散射的概率就是 $1-e^{-\tau^s} \simeq \tau^s$（当 $\tau^s \ll 1$)，也可以说这时光子被散射次数是 $N \simeq \tau^s$（当 $\tau^s \ll 1$)．所以一般情况下，对任意大小光深，散射次数为

$$N \simeq \tau^{s^2} + \tau^s,$$

或者

$$N \simeq \mathrm{Max}(\tau^s, \tau^{s^2}). \tag{3.65}$$

求散射次数有时很有用，例如，求光子在介质中的滞留时间．光子在 N 次散射中平均走过的路程是 Nl(l 是光子平均自由程)，光子自由飞行速度是 c，故滞留时间就是 $\Delta T \simeq Nl/c \simeq L^2/cl$．长的滞留时间意味着光子"冻结"于介质中而不能辐射，这使出射强度减小．此外，ΔT 越长，则光子被介质真吸收而消失的可能性越大．

读者容易产生以下疑问：既然弹性散射中，光子能量和数目都不变化，何以散射会参与辐射转移过程，影响到辐射与介质之间的能量交换？通过上述关于散射的随机游动分析，不难做出直观、定性的物理说明．原因在于：散射造成光子更长时间在源中滞留，无疑会增加光子被真吸收的可能性，最终使源中光子发射量不等于源表面光子的出射量．

现在用随机游动理论进一步定量的讨论散射对辐射转移的影响．更具体地说，是讨论散射参与的辐射转移过程最终如何改变了辐射源的出射光度(或强度)及其出射谱的形状．为此，先将前面的纯散射的辐射转移方程推广到介质既有散射(仍假定为弹性散射)，又有吸收和发射的情况．于是(3.61)式推广为

$$\begin{aligned}\frac{dI_\nu}{ds} &= -(k_\nu + k_\nu^s)I_\nu + j_\nu + j_\nu^s \\ &= -(k_\nu + k_\nu^s)I_\nu + k_\nu^s J_\nu + j_\nu.\end{aligned} \tag{3.66}$$

和(3.61)式一样，(3.66)式是积分微分方程，很不好解，仍采用随机游动理论来分析．从(3.66)式的总吸收系数表式可见，光子在遭到散射或吸收前的平均自由程是

$$l_\nu = \frac{1}{(k_\nu + k_\nu^s)}. \tag{3.67}$$

这一数值比纯散射或纯吸收介质中光子的平均自由程要小，物理上很合理. 光子自由飞过 l_ν 后，有两种命运，或被吸收，或被散射，自由程因散射的存在而变小.

其实(3.67)式给出的 l_ν 并无太大实际意义. 因为光子飞过路程 l_ν 后，并不一定因吸收而消灭. 实际问题中，关心的是光子由产生到被真吸收所飞过的平均自由程，这就是下面要求的 $l_*(\nu)$. 它才是和最后辐射源表面的出射强度 I_ν 相关的量.

光子走完(3.67)式所决定的自由程 l_ν 之后，遭真吸收的概率是 $\varepsilon_\nu=\frac{k_\nu}{k_\nu+k_\nu^s}$，遭散射的概率就是 $1-\varepsilon_\nu=k_\nu^s/(k_\nu+k_\nu^s)$. 因而，一个光子要经过 $\frac{1}{\varepsilon_\nu}=N$ 次散射后才被真吸收. 按随机游动理论，这 N 次散射之后，光子的均方位移是

$$l_*^2=\frac{l_\nu^2}{\varepsilon_\nu} \text{ 或 } l_*=\frac{l_\nu}{\sqrt{\varepsilon_\nu}}.$$

由此得到

$$l_*(\nu)=\frac{1}{\sqrt{k_\nu(k_\nu+k_\nu^s)}}. \tag{3.68}$$

和(3.67)式给的 l_ν 相比，$l_*(\nu)$ 才是一个有实际意义的物理量. $l_*(\nu)$ 表示一个光子由产生到被真吸收过程中间所经历的有效位移，也有的作者称之为光子扩散长度，或光子有效平均自由程，或称为光子热化长度(意思是光子飞过 l_* 路程后才被原子真吸收，辐射能最终成为粒子热能).

对于有限大尺寸 L 的介质，扩散行为会因 $L>l_*$ 或 $L<l_*$ 而有所不同，定义：

$$\tau_*\equiv L/l_* \tag{3.69}$$

为有效光深，它是描写散射对辐射转移过程的影响的一个重要物理量.

将(3.68)代入(3.69)式，得到有效光深为

$$\tau_*=\sqrt{\tau_a(\tau_a+\tau_s)}, \tag{3.70}$$

其中 $\tau_a=k_\nu L$ 就是最早定义的吸收光深，$\tau_s=k_\nu^s L$ 是散射光深. 如果 $\tau_s \gg \tau_a$ 则有

$$\tau_* \simeq \sqrt{\tau_a \tau_s}, \tag{3.71}$$

这时有效光深就是散射光深和吸收光深的几何平均值. 可见，只要存在散射，介质实际的有效光深 τ_* 就会比原来的光深 τ_a 大，$\tau_* > \tau_a$，即介质变得更加光厚，究其物理原因，在于散射使光子的路程更长更曲折，增大了光子被吸收的可能性.

对于一个已经达到热平衡的气体，已知有克希霍夫定律，$S_\nu = B_\nu = j_\nu / k_\nu$（但请读者注意，气体已热平衡，并不表示辐射源处于热平衡，因为这时辐射场可能尚未与热平衡气体达到共同热平衡）. 若 $\tau_* \ll 1$（透明介质），则单色光度当为

$$\mathscr{L}_\nu = 4\pi j_\nu V = 4\pi (k_\nu B_\nu) V, \tag{3.72}$$

V 是辐射源体积. 由(3.72)式可见，出射谱形 $\mathscr{L}_\nu$ 不同于黑体辐射谱形 B_ν. 原因就在此热平衡气体是光学薄的，$\tau_* \ll 1$. 每个光子都能在被真吸收之前以随机游动方式顺利逃出辐射源，光子气体没有可能通过与介质的充分能量交换而达到热平衡.

当 $\tau_* \gg 1$，即气体对辐射场是有效光厚，这时，只有表面壳层（面积为 A，厚为 l_*）中的光子才能在真吸收之前自由地逃出辐射源，故光度为

$$\mathscr{L}_\nu \simeq 4\pi (k_\nu B_\nu) A l_*(\nu). \tag{3.73}$$

由(3.73)式可见，即使对有效光厚的热平衡气体，其出射谱形为 $\mathscr{L}_\nu \propto k_\nu l_*(\nu) B_\nu$，它同样不一定是黑体辐射谱形 B_ν，是散射造成了对黑体谱的偏离.

由(3.68)式可见，对于有效光厚气体，只当 $k_\nu^s=0$，或 $k_\nu^s \ll k_\nu$ 时，才有 $l_*(\nu)=1/k_\nu$，从而由上面(3.73)式得到 $\mathscr{L}_\nu \propto B_\nu$. 使出射谱形为黑体谱，即对有效光厚气体只当其中电子散射不太重要时，出射的才是黑体谱.

读者可能会产生疑问，电子对光子的弹性散射并不改变光子的数目和光子的能量，又如何会改变辐射的谱形？回答是弹性散射

缩短了光子的平均自由程，由原先的 $l_\nu=1/k_\nu$ 减小为 $l_*(\nu)=1/\sqrt{k_\nu(k_\nu+k_\nu^s)}$，而且该有效平均自由程 $l_*(\nu)$ 与频率 ν 有关，不同频率的光子有不同的表面发射壳层厚度 $l_*(\nu)$. 而由(3.73)式可见，出射谱形 $\mathscr{L}_\nu\propto k_\nu l_*(\nu)B_\nu$. 故对黑体谱 $B_\nu(T)$ 的偏离因子 $k_\nu l_*(\nu)$ 与 ν 有关，改变了普朗克谱形 $B_\nu(T)$.

§3.7 非弹性散射造成的辐射转移——康普顿化——半定量讨论

到此还只限于讨论电子-光子弹性散射($h\nu'=h\nu$)对辐射转移过程的贡献. 究其原因，是散射确实促进了介质对光的有效吸收，增大了辐射场与介质间交换能量的机会，其实，电子-光子非弹性散射($h\nu'\neq h\nu$)造成的辐射转移是天体物理中更为重要的过程，这种非弹性散射造成的辐射转移常被称为"康普顿化过程". 当辐射穿过等离子体介质，并且辐射场光子的平均能量 $h\bar{\nu}$ 不等于等离子体中热电子平均热能 kT_e，则光子-电子间的康普顿散射(非弹性)将改变光子能量，发生辐射场和等离子体间能量交换. 如果 $h\bar{\nu}\gg kT_e$，则散射光频率变小，这一特定辐射转移过程称为康普顿软化(或叫下康谱顿化). 若 $h\bar{\nu}\ll kT_e$，散射将使光子能量(频率)增大，称为康谱顿硬化(上康谱顿化).

现就非弹性散射造成的辐射转移过程(康普顿化)做半定量讨论，方法简单易懂，在天体物理文献中也常被采用.

首先讨论在什么条件下非弹性散射会显著改变光的出射能谱?这显然取决于两个因素，一是每次散射中光子能量的平均相对改变 $\frac{\Delta(h\nu)}{h\nu}=\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$，二是取决于光子穿过介质前遭到非弹性散射的平均次数 N. 对于有限大介质，可定义一个康普顿参量 Y 表示这两个因素：

$$Y\equiv\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\cdot N, \tag{3.74}$$

一般说来，$Y\gtrsim1$，就表示出射光谱(能谱)因非弹性散射发生了显著改变；$Y\ll1$ 则表示出射谱变化较小. 所以参量 Y 是标志光谱改

变大小的参量.

要求出参量 Y 的估值,先求$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$和 N 的值,从读者熟悉的光子和静止电子间的康普顿散射公式出发:

$$h\nu=\frac{h\nu_i}{1+\frac{h\nu_i}{m_ec^2}(1-\cos\theta)}\simeq h\nu_i\left[1-\left(\frac{h\nu_i}{m_ec^2}\right)(1-\cos\theta)\right],$$

(3.75)

其中 $h\nu_i$ 是入射光子原始能值,$h\nu$ 是散射光子能量,θ 是散射角. 不难求出,在对散射角 θ 平均后,光子能量的相对改变率为

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\equiv\frac{\Delta(h\nu_i)}{h\nu_i}\simeq-\frac{\varepsilon}{m_ec^2}. \tag{3.76}$$

但若电子气本身是温度 T 的高温气体,把电子视为静止而采用上述$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$公式就不合理了. 从光子和运动电子的康普顿散射的普遍公式可以求出(参见以下§3.8中(3.101)式到(3.108)式的推导,结果见(3.108)式. 注意式中的 H 值必须除以 $\int dw=c\sigma_T$ 才是以下给出的$\frac{\overline{\Delta\varepsilon}}{\varepsilon}$,即(3.77)式),对于非相对论热电子而言,每次散射中光子相对能量平均变化率是

$$\frac{(\Delta\varepsilon)_{\mathrm{NR}}}{\varepsilon}=\frac{4kT-\varepsilon}{m_ec^2}, \tag{3.77}$$

即多了一项$\frac{4kT}{m_ec^2}$,脚标 NR 表示非相对论热电子气. 其实不必推导,仅从物理上即可粗略理解上式的合理性. 首先,每次非弹性散射中,光子能量平均改变$(\Delta\varepsilon)_{\mathrm{NR}}$自然取决于入射光子能 $\varepsilon=h\nu$ 和电子平均热运动能 kT 的差值 $kT-\varepsilon$ 的大小,能差越大,散射光子能量改变$|\Delta\varepsilon$ 也越大. 如果 $\varepsilon\simeq kT_e$,意味着碰撞中光子、电子双方都没有能量上的获益,$\Delta\varepsilon\simeq0$. 如果 $h\nu\equiv\varepsilon>kT$,平均而言散射中是光子损失能量,$(\Delta\varepsilon)_{\mathrm{NR}}\propto kT_e-\varepsilon<0$. 反之,若 $\varepsilon<kT_e$,散射中光子获得能量$(\Delta\varepsilon)_{\mathrm{NR}}>0$,这符合人们对经典的两球碰撞经验. 严格的

推导只多出一个因子 4，即

$$\frac{(\Delta\varepsilon)_{\mathrm{NR}}}{\varepsilon} \propto (4kT_r - \varepsilon).$$

为了将上式变成等式，要乘一个比例因子. 可以用巧妙的方法得到它：显然，这一构造的公式应在 $T\rightarrow 0$ 时成为(3.76)式. 因此待求的比例因子必为 m_0c^2. 至于 Y 参量中的第二个因子——光子散射次数 N，已由上节讨论弹性散射时给出，即(3.65)式：

$$N \simeq \mathrm{Max}(\tau_s, \tau_s^2).$$

结合(3.65)式和(3.77)式，得到

$$Y = \frac{4kT - \varepsilon}{m_ec^2}\mathrm{Max}(\tau_s, \tau_s^2), \tag{3.78}$$

其中

$$\tau_s = N_e\sigma_T R = k_{es}R,$$

也可写成

$$\tau_s = \rho K_{es}R,$$

ρ 是质量密度，$K_{es} \equiv \sigma_T/m_p = 0.40\mathrm{cm}^2\mathrm{g}^{-1}$是质量吸收系数，$R$ 则是散射介质的尺寸.

利用 Y 参量可以半定量讨论非弹性散射造成的出射谱的变化，现举例说明：

1. $\varepsilon \ll 4kT$（例如射电辐射穿过温度很高的热等离子体）

此时有

$$Y_{\mathrm{NR}} \simeq \frac{4kT}{m_ec^2}\mathrm{Max}(\tau_s, \tau_s^2), \tag{3.79}$$

而

$$(\Delta\varepsilon)_{\mathrm{NR}} \simeq \frac{4kT}{m_ec^2}\varepsilon,$$

即每次散射中能量增益为

$$\frac{d\varepsilon}{dN} \simeq \frac{4kT}{m_ec^2}\varepsilon.$$

完成对上式积分，求得 N 次散射后，光子能量值 ε_N 为

$$\varepsilon_N = \varepsilon_i \exp\left(\frac{4kT}{m_e c^2} N\right), \tag{3.80}$$

其中 ε_i 是光子初始能量. 当然求出上式时,要求散射次数不能太大,否则求出的 ε_N 太大,会破坏 $\varepsilon \ll 4kT$ 的前提条件,这一指数公式也可用 Y 参量表示成

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= \varepsilon_i e^Y = \varepsilon_i \exp\left(\frac{4kT}{m_e c^2} \mathrm{Max}(\tau_s, \tau_s^2)\right) \\ &= \varepsilon_i \exp\left(\frac{4kT}{m_e c^2} N_e^2 \sigma_T^2 R^2\right). \end{aligned} \tag{3.81}$$

光子能量(频率)的增大表示,在条件 $\varepsilon \ll 4kT$ 下发生了康普顿硬化过程,使原有辐射频谱中高频端强度增大,频谱应有向高频方向的移动和变形.

如果散射次数 N 大到最终使光子能量 $\varepsilon_N \sim 4kT$,就称康普顿化达到饱和. 此后光子即使继续遭到散射,也不能从电子得到能量(即 $\Delta\varepsilon \propto (4kT - \varepsilon) \simeq 0$),由临界条件 $\varepsilon_N \simeq 4kT$ 和(3.80)式可求出到达散射饱和的临界散射次数为

$$N^{cr} = \frac{m_e c^2}{4kT} \ln\left(\frac{4kT}{\varepsilon_i}\right) \tag{3.82}$$

从而产生饱和散射的临界光深为

$$\tau_s^{cr} = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4kT} \ln\left(\frac{4kT}{\varepsilon_i}\right)}. \tag{3.83}$$

可见初始光子能量 ε_i 越小,临界散射次数 N^{cr} 越大. 不必担心低频光子经若干次散射后能量会达到饱和. 光子散射后能量的变化自然导致出射谱形的变化. 举一例说明,例如辐射源是一个温度为 T 的高温稀薄等离子体. 假定它有效光薄 $\tau_* \ll 1$,但与此同时电子散射光深 $\tau_s \gg 1$(这在实际中常见,$\tau_* = \sqrt{\tau_a \tau_s}$,对于一个电离度很高的等离子体,$\tau_s$ 很大而 τ_a 常常很小),因此源中产生的光子经多次康普顿散射后,最终必从表面逃逸,且能量由 $\varepsilon_i \to \varepsilon_f = \varepsilon_i e^Y$. 假如源中原始的,即刚产生、尚未散射的发射系数的谱形分布是 $j_{\nu_i} d\nu_i$,或者记为 $j_{\varepsilon_i} d\varepsilon_i$(读者可以任意把它想像为热轫致谱,或是幂律谱),

则由于康普顿化，原本在 ε_i—$\varepsilon_i+d\varepsilon_i$ 间隔的光子将移到 ε—$\varepsilon+d\varepsilon$，$\varepsilon=\varepsilon_i e^Y$，因此康普顿化后，谱发射系数形式应为

$$j_\varepsilon d\varepsilon = e^Y j_{\varepsilon_i} d\varepsilon_i, \tag{3.84}$$

其中 $Y\equiv\frac{4kT}{mc^2}\tau_s^2$，$\varepsilon=\varepsilon_i e^Y$.

不能简单认为康普顿化只是把频谱不变形地平移到高频段，再放大 e^Y 倍，按(3.83)式，初始光子能量 ε_i 越大，临界光深 τ_s^{cr} 越小，最终可能在某个高频位置 ε_i 处小于该辐射源的实际散射光深，$\tau_s^{cr}(\varepsilon_i)\leqslant\tau_s$，则对于 $\varepsilon>\varepsilon_i$ 的高频光子，不多的散射次数就使光子能量达到稳定饱和值 $\varepsilon_f\simeq 4kT$，增长公式 $\varepsilon_f=\varepsilon_i e^Y=\varepsilon_i\exp\left(\frac{4kT}{mc^2}\tau_s^2\right)$ 不再成立.

由于 $\tau_*\ll 1$，源中光子都可顺利逃出表面，(3.84)式给出的康谱顿硬化后的谱形 $j_\varepsilon d\varepsilon$ 也就是出射谱形.

2. $\varepsilon\gg 4kT$（例如硬 X 射线穿过“冷”的等离子体）

此时有

$$(\Delta\varepsilon)_{\mathrm{NR}} = \frac{\varepsilon}{mc^2}(4kT-\varepsilon) \simeq -\varepsilon^2/mc^2 < 0.$$

故一次散射有

$$\frac{d\varepsilon}{dN} = -\frac{\varepsilon^2}{mc^2}. \tag{3.85}$$

积分上式，求得 N 次散射后的光子能量为

$$\frac{1}{\varepsilon_N}-\frac{1}{\varepsilon_i}=\frac{N}{mc^2},$$

从而

$$\varepsilon_N = \left(\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_N}{\varepsilon_i}\right)\frac{mc^2}{N},$$

所以在 N 次散射后，光子能量因康谱顿软化而减少：

$$(\Delta\varepsilon)_N = \varepsilon_N-\varepsilon_i = -\frac{N}{mc^2}\varepsilon_N\varepsilon_i. \tag{3.86}$$

如果考虑非相对论情况下的散射，且每次散射中光子能量改

变 $\Delta\varepsilon$ 很小(即要求入射光子能量 $\varepsilon_i \ll mc^2$),$\Delta\varepsilon \simeq \frac{-\varepsilon^2}{mc^2} \ll \varepsilon_i$,只要散射次数 N 不太大,总可以将(3.86)式写成

$$(\Delta\varepsilon)_N \simeq -\frac{N}{mc^2}\varepsilon_i^2 \simeq -\frac{N}{mc^2}\varepsilon_N^2,$$

因此 N 次散射后,有

$$\varepsilon = \varepsilon_N \simeq \varepsilon_i - \frac{N}{mc^2}\varepsilon_i^2. \tag{3.87}$$

假如等离子体光学薄,$\tau_* \ll 1$,但 $\tau_s \gg 1$,在康普顿软化过程中,每个光子能量由 ε_i 减少到 $\varepsilon_i - \frac{N}{mc^2}\varepsilon_i^2$,再由表面逸出,因此出射谱形不同于原始的谱发射系数谱形. 整个出射谱形发生了向低频方向的移动和变形,原在 ε_i—$\varepsilon_i + d\varepsilon_i$ 的光子移到低频段 ε—$\varepsilon + d\varepsilon$. 设想原始谱形由 $j_{\varepsilon_i} d\varepsilon_i$ 表示,故单位体积单位时间该单色能量光子发射数为 $N_{\varepsilon_i} d\varepsilon_i = \frac{j_{\varepsilon_i} d\varepsilon_i}{\varepsilon_i}$,$N$ 次散射后,这些光子能量成为 $\varepsilon = \varepsilon_i - \frac{N}{mc^2}\varepsilon_i^2$,但光子数不变,因此康普顿软化后,实际的谱发射系数成为

$$j_\varepsilon d\varepsilon = N_{\varepsilon_i} d\varepsilon_i \left(\varepsilon_i - \frac{N}{mc^2}\varepsilon_i^2 \right) = j_{\varepsilon_i} d\varepsilon_i \left[1 - \frac{N}{mc^2}\varepsilon_i \right].$$

以上例子中,都假定了 $\tau_* \ll 1$,但 $\tau_s \gg 1$. 即源中光子虽经多次散射,但能不被吸收地逃出表面. 读者可以试讨论 $\tau_* > 1$ 情况下(即有效自由程 $l_* \ll$ 介质线度 R),康普顿化过程对出射谱的影响.

§3.8 康普顿化的理论处理——Kompaneets 扩散方程和推广的 Kompaneets 方程

电子-光子非弹性散射造成的辐射转移——康普顿化过程,在天体物理学中,特别是在 X 射线天文学和 γ 射线天文学中相当重要,故有必要给出更严格的理论分析. 可以用一个简单的量级估计说明康普顿化重要性. 众所周知,在每次康普顿散射中,如果电子在碰撞前近似看做静止,则碰后散射光子的相对波长变化为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{2\lambda_c}{\lambda_0}\sin^2\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\lambda_c}{\lambda_0}, \tag{3.88}$$

其中 $\lambda_c \equiv h/m_e c = 0.024\text{Å}$ 为康普顿波长，θ 为散射角. 可见，散射造成的频率改变与入射光子原始频率有关，入射光波长越短，相对波长改变越大. 对于 $\lambda_0 = 5000\text{Å}$ 可见光，$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq 10^{-6}$；对于 $\lambda_0 \simeq 0.5\text{Å}$ ($h\nu \sim 20\text{keV}$) 的 X 射线光子，$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq 10^{-2}$；而对 $\sim 100\text{keV}$ 的 γ 射线光子，有 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq 10^{-1}$. 这说明，康普顿化这一特殊的由散射造成的辐射转移过程在 X 射线和 γ 射线天文学中具有特别重要的意义.

在射电及红外天文学中，康普顿化过程也有重要作用. 虽然在这种情况下，每次光子-电子碰撞造成的频率变化很小，但在天体尺度上，多次散射的积累效应不容忽视.

对于康普顿化过程，严格的理论处理原则上仍然是从辐射转移方程入手. 但对于光子-电子散射过程，这一方法相当繁难，因为方程中的发射系数 j_ν 将用同一地点的强度 I_ν 的积分表示出来，使方程成为复杂的积分微分方程. 另一常用方法是对光子-电子散射做 Monte-Carlo 模拟，这一方法的困难在于庞大的计算量. 为了避免以上两种方法的困难，Kompaneets 发展了一种较为简便的扩散近似方法，其基本观念是，将辐射场和等离子体整体看做光子气与电子气的混合气体. 而辐射场由于光子-电子散射造成的频率分布变化被形式地看成是光子气体在"频率空间"中的"扩散"过程. 当光子-电子混合气体最终达到热平衡后，扩散停止，频谱不再改变. 为了定量描述在趋向热平衡的康普顿化过程中，光子气频谱分布随时间的变化规律，需要建立光子分布函数 $n(\nu)$ 满足的动力学扩散方程. (参见 Kompaneets, A. S., *Soviet Phys.* ——*JETP*, 1957, **4**, 730; Weymann, R., *Phys. Fluids*, 1965, **8**, 2112; Ross, R. R. et al., *Astrophys. J.*, 1978, **219**, 292.).

一、先介绍 Kompaneets 扩散方程的理论推导，该方程适用条件是 $h\bar{\nu} \ll kT_e \ll m_e c^2$，即适用于康普顿硬化过程，在射电天文学和红外天文学中有着重要的应用. 然后本书将导出推广的 Kompaneets 方程，使之适用于普遍的康普顿化辐射转移过程，特别是可

应用于康普顿软化过程，因而对X射线天文学将非常有用. 设想一个热等离子体和光子气体的“混合气体”，并假定这两种气体尚未达到热平衡，即不能用一个统一的温度描写. 然而，由于电子之间是长程库仑力作用，所以电子间碰撞极易发生，很快自身达到热平衡. 因此，以下将假定热电子气本身已经迅速热平衡，并具有麦克斯韦速度分布，

$$f(p)=f_0\exp\left[-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}\right]d^3\boldsymbol{p}.$$

经过光子和电子间的康普顿散射（碰撞过程），在足够长时间后，最终会建立两种气体的共同热平衡.

现在要问：在未达到平衡前，在热电子和光子的碰撞过程（即康普顿化）中，光子分布函数 $n(\nu)$ 如何随时间而变化？即求 $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c$ 的表达式，脚标 c 表示以下只考虑康普顿散射引起的分布变化.

先说明分布函数 $n(\nu)$ 的意义. $n(\nu)$ 代表光子气中，每一个频率为 ν 的光子状态中的粒子数. 已知 ν—$\nu+d\nu$ 中单位体积内光子状态数是 $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$，所以 ν—$\nu+d\nu$ 中的真实光子数目就是 $\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}n(\nu)$. 注意，“粒子数”$n(\nu)$ 可以小于1，即允许 $n(\nu)<1$.

由于 $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c$ 完全取决于电子和光子的碰撞，因此计算 $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c$ 必须先算康普顿散射跃迁概率. 由于光子气和电子气分别是全同粒子体系，故跃迁概率的计算要用到二次量子化方法. 这里只列出得到的结果，并指出它与经典量子理论结果的不同之处.

经典理论中，两粒子碰撞后，从某态 k 与 k'（粒子能量分别是 ε_k 与 $\varepsilon_{k'}$）跃迁到另一种态 l,l'（能量 $\varepsilon_l,\varepsilon_{l'}$）的跃迁数目，正比于始态 k 和 k' 上的粒子数 $n_k,n_{k'}$，即

$$p_{ll',kk'}=A_{ll',kk'}n_kn_{k'} \tag{3.89}$$

系数 $A_{ll',kk'}$ 即跃迁概率——每对原来分别在态 k,k' 上的粒子碰后跃迁到 l,l' 态的概率. $A_{ll',kk'}$ 的大小正比于粒子相互作用能量矩阵元 $W_{ll',kk'}$.

而全同粒子系的二次量子化方法给出的(对于玻色气体)这一跃迁数应为

$$p_{ll',kk'} = A_{ll',kk'}(1+n_l)(1+n_{l'})n_k n_{k'}. \tag{3.90}$$

因此,(3.90)式和经典公式(3.89)不同在于,跃迁数不仅和始态粒子数 $n_k, n_{k'}$ 有关,也和终态密度 $n_l, n_{l'}$ 有关;且终态密度 $n_l, n_{l'}$ 越密,则跃迁可能性越大,即玻色粒子有凝聚到最稠密状态上的倾向. 有时把这种凝聚倾向称作受迫跃迁过程.

对于费米气体,二次量子化给出的跃迁数则为

$$p_{ll',kk'} = A_{ll',kk'}(1-n_l)(1-n_{l'})n_k n_{k'}. \tag{3.91}$$

显然,若气体足够稀薄,使 $n_l, n_{l'} \ll 1$,则(3.90)和(3.91)式还原为经典结果(3.89)式.

如果气体是热平衡的,则由于碰撞跃迁,粒子从 $k,k' \to l,l'$ 以及 $ll' \to kk'$ 的跃迁数应相同(细致平衡原理),即

$$p_{ll',kk'} = p_{kk',ll'}. \tag{3.92}$$

从(3.89)式和(3.92)式可以容易导出经典的玻耳兹曼分布,而从(3.90)式和(3.92)式可导出玻色分布,最后,从(3.91)和(3.92)式可导出费米分布. 这在一般量子理论教程中可以找到.

现在的问题是,对于尚未达到热平衡的气体,由于康普顿散射而引起的光子分布的变化将是如何,即求尚未达到热平衡时的变化率$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c$.

现考虑动量 $\boldsymbol{p}$ 的电子与频率 ν 的光子的碰撞,碰后相应的量记为 $\boldsymbol{p}'$ 和 ν'. 由于动量守恒及能量守恒,在非相对论极限下应有

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)\boldsymbol{n} + \boldsymbol{p} = \left(\frac{h\nu'}{c}\right)\boldsymbol{n}' + \boldsymbol{p}',$$

$$h\nu + \frac{p^2}{2m_0} = h\nu' + \frac{p'^2}{2m_0}, \tag{3.93}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$ 分别是碰撞前后光子的运动方向. 这一碰撞使光子频率由 $\nu \to \nu'$,是使频率为 ν 的光子数目 $n(\nu)$ 减少的碰撞过程. 显然还有相反过程,即逆碰撞$(\boldsymbol{p}', \nu', \boldsymbol{n}') \to (\boldsymbol{p}, \nu, \boldsymbol{n})$. 结果使原先频率为 ν' 的光子变成频率为 ν 的光子,该过程是使光子数 $n(\nu)$ 增加的过

程.

如果动量在 p—$p+dp$ 的电子数记为 $N_e f(p) d^3p$（$d^3p \equiv dp_x dp_y dp_z$ 是动量空间相体元），而 $(p,\nu,n) \leftrightarrows (p'\nu'n')$ 的散射跃迁概率记为 dW，则由于光子是玻色子，故跃迁数应为

$$(1+n')nN_e f(p)d^3p dW.$$

式中 n,n' 是碰撞前后光子数的简化记法，即

$$n \equiv n(\nu), n' \equiv n(\nu').$$

写出以上等式时，假定了电子气足够稀薄的，故作为费米气体的电子气体实际上还原为经典气体，跃迁数和终态电子数目无关. 前面曾经指出，可以认为经典电子气自身已经达到热平衡状态，故

$$f(p) = f(p) = f_0 e^{-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m_0}},$$

式中 f_0 是归一因子.

同理，逆碰撞 $(p',\nu',n') \rightarrow (p,\nu,n)$ 的跃迁数应为

$$(1+n)n'N_e f(p')d^3p'dW,$$

式中 $n' \equiv n(\nu')$. 注意，正反碰撞的跃迁概率 dW 是相同的.

因此，由康普顿散射引起的光子分布的变化为

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = -N_e\int d^3p\int[n(1+n')f(p) - n'(1+n)f(p')]dW. \tag{3.94}$$

显然，在(3.94)式中，若代入热平衡分布

$$f(p) = f_0 e^{-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m_0}},$$

以及光子气的热平衡分布（普朗克分布）

$$n(\nu) = (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1},$$

则必定有 $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = 0$，即混合气体热平衡时，康普顿散射将不再引起分布 $n(\nu)$ 的变化. 因此，康普顿化的影响只发生在趋向热平衡的过程之中.

(3.94)式可以简化. 因为热电子气体是非相对论性的，即 $kT \ll mc^2$（T 是电子气温度），故每次散射过程中，光子频率变化非常

小，即 $\nu'-\nu\equiv\Delta\ll\nu$，因此，可用小量 Δ 展开(3.94)式至 Δ^2 级. 以下用无量纲频率值 $x\equiv\frac{h\nu}{kT}$ 代替频率 ν，则(3.94)式写成

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c=\left[\frac{\partial n}{\partial x}+n(1+n)\right]\frac{N_e h}{kT}\int d^3\boldsymbol{p}\int f(p)\Delta dW$$
$$+\left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+2(1+n)\frac{\partial n}{\partial x}+n(1+n)\right]$$
$$\cdot\frac{N_e}{2}\left(\frac{h}{kT}\right)^2\int d^3\boldsymbol{p}\int f(p)\Delta^2 dW \tag{3.95}$$

(3.95)式中，第二个积分比第一个容易得多，因此我们首先计算第二个积分，而第一个积分值可以从物理的角度考虑，即利用康普顿散射过程中光子总数不变这一事实导出，不必再去计算.

现计算第二个积分值，即

$$I\equiv h^2\int d^3p\int f(p)\Delta^2 dW. \tag{3.96}$$

为此，需要先求出频率改变 $\Delta\equiv\nu'-\nu$. 由(3.93)式中消去 p'，即可找到 ν' 作为 ν, p 及散射角(也就是 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}'$ 之夹角)的函数. 如果在求解中，代入 $\nu'=\nu+\Delta$，并且认定 Δ 是小量，只保留至 Δ 的一次项(这样的简化对于计算含 Δ^2 项的第二个积分值 I 是好的近似，但不适用于计算含 Δ 一次项的第一个积分)，即可直接求出

$$h\Delta=-\frac{hc\nu\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}')+(h\nu)^2(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')}{m_0c^2\left[1-\frac{h\nu}{m_0c^2}(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}'}{m_0c}\right]}. \tag{3.97}$$

(3.97)式可以进一步简化. 如果我们限定只讨论 $h\nu\ll m_0c^2$ 的低频辐射场，又限定讨论非相对论性等离子体，即 $kT\ll m_0c^2$，则上式分母方括号中的数值～1(注意电子动量 $p=m_0v\simeq m_0\sqrt{\frac{kT}{m_0}}\ll m_0c$). 进一步，如果我们限定只讨论 $h\nu\ll kT$ 条件下的康普顿硬化过程，则(3.97)式分子两项中只需保留第一项. 因此，(3.97)式最后简化为

$$h\Delta\simeq-\frac{hc\nu}{m_0c^2}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'). \tag{3.97'}$$

将该值代入(3.96)式,就得到第二个积分值:

$$I = h^2\int d^3\boldsymbol{p}\int f(p)\Delta^2 dW$$

$$= \left(\frac{h\nu}{m_0c}\right)^2\int d^3\boldsymbol{p}\int f(p)\,|\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}')|^2 dW.$$

若先固定 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'$,以 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'$ 作为 z 轴,电子动量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'$ 夹角记为 Θ,对各种动量 $\boldsymbol{p}$ 作积分.得到

$$I = \left(\frac{h\nu}{m_0c}\right)^2\int d^3\boldsymbol{p}f(p)\int p^2|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2\cos^2\Theta dW$$

$$= \left[\left(\frac{h\nu}{m_0c}\right)^2\int|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2 dW\right]\int p^4 f(p)\cos^2\Theta\sin\Theta dp d\Theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int p^2 f(p)4\pi p^2 dp\left[\left(\frac{h\nu}{m_0c}\right)^2\int|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2 dW\right].$$

由于 $f(p)=f_0e^{-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m_0}}$,故

$$\int p^2 f(p)4\pi p^2 dp = 2m_0\left(\frac{3}{2}kT\right) = 3m_0kT,$$

由此得到

$$I = \left(\frac{h\nu}{m_0c}\right)^2 m_0kT\int|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2 dW. \tag{3.98}$$

最后,还需要计算上式中的积分 $\int|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2 dW$.在非相对论极限下,康普顿微分散射截面近似为汤姆孙微分截面(3.97)式,故跃迁概率为

$$dW = cd\sigma_T = c\,\frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta)2\pi\sin\theta d\theta. \tag{3.99}$$

式中 $r_0=\left(\frac{e^2}{m_0c^2}\right)$ 是电子半径,θ 是光的散射角,即 $\boldsymbol{n}'$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角.

由(3.99)式可见,dW 对散射角 θ 和 $\pi-\theta$ 对称,故

$$\int\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'dW = \int\cos\theta dW = 0,$$

所以

$$\int|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2 dW = 2\int(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')dW$$

$$= 2\int dW = \frac{16}{3}\pi r_0^2 c.$$

因此，欲求的积分(3.98)式成为

$$I = \frac{2kT}{m_0c^2}(h\nu)^2\left(\frac{8\pi}{3}r_0^2\right)c.$$

$$= \frac{2kT}{m_0c^2}(h\nu)^2\sigma_T c. \tag{3.100}$$

将(3.100)代入(3.95)式，则(3.95)式右方第二个方括号的系数成为

$$\frac{N_e}{2}(kT)^{-2}I = \frac{(h\nu)^2}{m_0c^2}(kT)^{-1}N_e\sigma_T c.$$

现在求(3.95)式右方第一个积分

$$H \equiv h\int d^3\boldsymbol{p}\int f(p)\Delta dW. \tag{3.101}$$

直接计算 H 是困难的，但可根据散射中光子数不变这一事实，从第二个积分值 I 导出第一个积分 H①. 光子数不变的这一事实可以用“频率空间”中光子数守恒方程(即连续性方程)来表示，即

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = -x^{-2}\frac{\partial(x^2 j)}{\partial x}, \tag{3.102}$$

式中 j 是在“频率空间”中定义的光子“流”. 频率空间的三个轴分别是 x_1, x_2, x_3，而

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \chi \equiv \frac{h\nu}{kT}.$$

此空间中光子流的连续性方程原是

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = -\nabla\cdot\boldsymbol{j}, \quad \nabla \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

由于所定义的流 j 显然只有径向分量，故在采用球坐标(χ, θ, φ)代替直角坐标(x_1, x_2, x_3)时，应有

---

① 显然，自由电子既不可能吸收也不可能发射光子，因为吸收或发射光子的过程无法同时满足能量和动量守恒定律，只有自由电子对光子的散射过程才是可能的. 而在散射过程中，没有光子数的改变，只有频率的变化.

$$\nabla \cdot j = \frac{1}{x^2} \frac{\partial (x^2 j)}{\partial x},$$

由此就得到(3.102)式.

把(3.102)式写成

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = -\frac{2}{x} j - \frac{\partial j}{\partial x}, \tag{3.103}$$

比较(3.102)与(3.95)式，可知流的形式必为

$$j = g(x)\left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n)\right]^{①}. \tag{3.104}$$

将(3.104)式代入(3.103)式，得到

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = -g(x)\left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (2n+1)\frac{\partial n}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{2g}{x}\right]\left[\frac{\partial n}{\partial x} - n(1+n)\right]. \tag{3.105}$$

将(3.95)式写成

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n)\right]\frac{N_e}{kT}H + \frac{N_e}{2}(kT)^{-2}I\left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(n+1) \cdot \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n)\right]. \tag{3.106}$$

将该式与(3.105)式比较，两式的 $\partial^2 n/\partial x^2$ 的系数应当相同，故

$$g(x) = -\frac{N_e}{2}(kT)^{-2}I = -\frac{h^2\nu^2}{m_0c^2}\frac{1}{kT}\sigma_T N_e c$$

---

① 理由是显然的，因(3.95)式线性地含有二阶导数$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$，即$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$的系数中不含有$n$. 这就从(3.103)的形式推知，$j$ 只可能是一阶导数$\frac{\partial n}{\partial x}$与 n 的某一函数之和的形式. 此外，由于在达到平衡时，即当$n=(e^x-1)^{-1}$时，应有 $j=0$. 而这一 n 的形式显然有$\frac{\partial n}{\partial x}=-n(1+n)$，故 j 的形式必为(3.104)式，其中系数 $g(x)$ 待定.

$$= -\frac{kT}{m_0c^2}\sigma_T N_e c x^2 = -Ax^2,$$

(3.107)

式中系数

$$A \equiv \left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)\sigma_T N_e c.$$

或者引入光子的康普顿散射自由程 $l \equiv \frac{1}{N_e\sigma_T}$，则系数为

$$A \equiv \left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)\frac{c}{l}.$$

将(3.107)的 $g(x)$ 值代入(3.105)式，并再一次与(3.106)式比较，即求得第一个积分值 H：

$$H = \frac{kT}{N_e}Ax(4 - x),$$

或者

$$N_e H = \left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)\frac{c}{l}\cdot h\nu\left(4 - \frac{h\nu}{kT}\right). \qquad (3.108)$$

把两个积分值(3.98)式和(3.108)式代入(3.95)式，得到

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n)\right]\left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)\frac{c}{l}x(4-x)$$

$$+\left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n)\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n)\right]$$

$$\cdot\left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)\frac{c}{l}x^2.$$

如果引入无量纲的时间

$$y \equiv t\bigg/\left(\frac{m_0c^2}{kT}\right)\left(\frac{l}{c}\right), \qquad (3.109)$$

则上式最后简化为

$$\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_c = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right)\right]. \qquad (3.110)$$

若 $n \ll 1$(稀薄辐射场)，则有

$$\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_c = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n\right)\right], \qquad (3.111)$$

或者记为

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c=\left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)\left(\frac{c}{l}\right)\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x}+n\right)\right]. \qquad (3.112)$$

式中

$$x=\frac{h\nu}{kT}, \qquad l\equiv\frac{1}{N_e\sigma_T}=\frac{1}{N_e}\left(\frac{8\pi}{3}r_0^2\right)^{-1}.$$

方程(3.110)或者近似方程(3.111)或(3.112)式，即为我们所要寻找的辐射场康普顿化过程中光子分布函数 $n(\nu)$ 所满足的动力学扩散方程，即 Kompaneets 方程. 注意，它是“频率空间”中的“扩散方程”，x 代表无量纲的频率值. 求解扩散方程，就可得到康普顿化过程中辐射频谱随时间的变化，以及辐射能量的变化.

例如，由(3.111)式容易求出康普顿化过程中辐射场能量密度增长 e 倍(e 是自然对数的底)的特征时间. 为此，将(3.111)式两边乘以 x^3，则得到

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3n)=x\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x}+n\right)\right],$$

两边积分，则有

$$\frac{d}{dy}\int nx^3dx=4\int nx^3dx-\int nx^4dx.$$

当辐射场尚未与热电子气平衡时，$h\nu$ 应远小于 kT 值，故 $x=\frac{h\nu}{kT}\ll 1$. 因此，上式中右方第二个积分可以略去不计，只保留第一个，故有

$$\frac{d}{dy}\int nx^3dx=4\int nx^3dx,$$

结果得到

$$\int_0^\infty nx^3dx=e^{4y}. \qquad (3.113)$$

该式中 y 代表时间，左方积分与辐射场的能密度 U_{ph} 相联系；因为 $x=\frac{h\nu}{kT}$ 是无量纲频率，而

$$U_{\rm ph}=\int_0^{\infty}\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu n(\nu)h\nu\propto\int_0^{\infty}nx^3dx.$$

(3.113)式表明，在康普顿硬化过程中，辐射场不断从高温等离子体中夺取能量. 辐射场能量一开始随时间作指数增长. 当 $y=\frac{1}{4}$，即

$$t_c=\frac{1}{4}\left(\frac{m_0c^2}{kT}\right)\frac{l}{c} \tag{3.114}$$

时，辐射场能量将增长 e 倍，这和前面的半定量公式(3.81)相符.

又如，若电子气和辐射场(光子气)分别处于热平衡，但电子气温度 T 不等于辐射场温度 T_r，$T_r\neq T$，则可由方程(3.112)求得康普顿化过程中能量密度 $U_{\rm ph}$ 的变化率为

$$\frac{dU_{\rm ph}}{dt}=4U_{\rm ph}N_ec\sigma_T\frac{kT-kT_r}{m_0c^2}. \tag{3.115}$$

当 $T_r=T$ 时，辐射场能量不再变化.

注意，所有以上讨论都简单地假定没有其它的相互作用，电子和光子之间仅有康普顿散射过程. 但在实际情况下，总还有其它相互作用存在；例如，电子的自由-自由发射以及自由-自由吸收(轫致辐射和吸收). 但只要热等离子体足够稀薄，电子密度 N_e 足够小，则可略去自由-自由过程，以上导出的康普顿化方程(3.110)、(3.111)或(3.112)就都有效.

二、推广的 Kompaneets 方程. 上面的 Kompaneets 方程(3.112)其实就是非弹性散射过程的辐射转移方程. 尽管它是以扩散方程形式出现，和前面传统形式转移方程(3.19)外表大不一样，但说的都是辐射场-介质间能量交换造成的对辐射谱的影响(强度、谱形). Kompaneets 方程(3.112)有局限性，只适合于条件 $h\bar{\nu}\ll kT_e\ll m_ec^2$ 的康普顿硬化过程，所以通常出现于射电天文和红外天文学的文献中. 究其原因，是由小量公式($h\Delta\equiv h(\nu'-\nu)$(3.97)式简化为(3.97′)式时，利用了 $h\bar{\nu}\ll kT_e\ll m_ec^2$ 关系，从而使分母方括号中量数值～1，同时分子的两项中可略去第二项，只留第一项. 其实，如果放弃条件 $h\nu\ll kT_e$，对 $h\nu$ 和 kT 的关系不作限制，而只

保留条件 $h\bar{\nu} \ll m_e c^2$ 及 $kT_e \ll m_e c^2$，则(3.97)将不能简化为(3.97′)，从而不能导出 Kompaneets 方程. 在放弃 $h\nu \ll kT$ 的条件下，(3.97)式的分子中两项都必须保留，从而化为

$$h\Delta \simeq -\frac{h\nu c}{m_e c^2}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}') - \frac{(h\nu)^2}{m_e c^2}(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'). \quad (3.97'')$$

理由很简单：在第一项中电子动量的量级为 $p \simeq m_e\bar{v} \simeq m_e\sqrt{\frac{kT}{m_e}}$，第二项和第一项量级之比为 $\sqrt{\frac{h\nu}{m_e c^2}\Big/\frac{kT}{h\nu}}$. 可见当 $h\nu$ 可以与 kT 比较，特别是当 $h\nu \gg kT$（这在 X 射线和 γ 射线天文中常遇到）时，第二项不可略去，遂得(3.97″)式. 把(3.97″)式代入(3.96)式，可得

$$\begin{aligned} I &= h^2\int d^3\boldsymbol{p}\int dW f(\boldsymbol{p})\Delta^2 \\ &= \int d^3\boldsymbol{p}\int dW f(\boldsymbol{p})\Big[-\frac{hc\nu}{m_e c^2}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}') \\ &\quad - \frac{(h\nu)^2}{m_e c^2}(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')\Big]^2 \\ &= \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_3, \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{I}_1 = \left(\frac{h\nu}{m_e c}\right)^2\int d^3\boldsymbol{p}\int dW f(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}')|^2,$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \left(\frac{h^2\nu^2}{m_e c^2}\right)^2\int d^3p\int dW f(p)(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2,$$

$$\boldsymbol{I}_3 = \frac{2(h\nu)^3}{m_e^2 c^3}\int d^3\boldsymbol{p}\int dW f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}')(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}').$$

先固定 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'$，以 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'$ 作为 z 轴，电子动量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'$ 夹角记为 Θ，然后对各种动量 $\boldsymbol{p}$ 做积分得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_1 &= \left(\frac{h\nu}{m_e c}\right)^2\int d^3\boldsymbol{p} f(\boldsymbol{p})\int dW p^2|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2\cos^2\Theta \\ &= \left[\left(\frac{h\nu}{m_e c}\right)^2\int dW|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}'|^2\right] \end{aligned}$$

$$\int p^4 f(p)\cos^2\Theta\sin\Theta dp d\Theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int p^2 f(p) 4\pi p^2 dp \left[\left(\frac{h\nu}{m_e c}\right)^2 \int dW |\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}'|^2\right].$$

把 $f(\boldsymbol{p}) = f_0 \exp(-p^2/2m_e kT_e)$ 代入得

$$\int p^2 f(p) 4\pi p^2 dp = 3m_e kT_e,$$

由此得到

$$I_1 = \left(\frac{h\nu}{m_e c}\right)^2 m_e kT_e \int |\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}'|^2 dW$$

$$= \left(\frac{h\nu}{m_e c}\right)^2 2m_e kT_e \int (1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}') dW.$$

同理有

$$I_2 = \left(\frac{h^2\nu^2}{m_e c^2}\right)^2 \int d^3\boldsymbol{p} f(\boldsymbol{p}) \int (1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2 dW$$

$$= \left(\frac{h^2\nu^2}{m_e c^2}\right)^2 \int (1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2 dW,$$

$$I_3 = \frac{2(h\nu)^3}{m_e^2 c^3}\left[\int |\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}'|(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}') dW\right]$$

$$\cdot \int p^3 f(p)\cos\Theta\sin\Theta dp d\Theta d\varphi$$

$$= 0.$$

可见，最后归结为计算$\int(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')dW$ 和$\int(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2 dW$. 积分是对各种可能的散射方向 θ 做的. 注意到，在非相对论极限下，康普顿微分散射截面近似为汤姆孙微分截面，故跃迁概率为

$$dW = c d\sigma_T = c\frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2\theta) 2\pi\sin\theta d\theta,$$

其中 $r_0 = e^2/m_e c^2$ 是电子经典半径；θ 为光的散射角，即 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}'$ 的夹角. 由上式可见，dW 对散射角 θ 和 $\pi-\theta$ 对称，故

$$\int \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}' dW = \int \cos\theta dW = 0.$$

则有

$$\int (1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')dW = \int dW = c\int d\sigma_T = \sigma_T c,$$

$$\int (1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2 dW = \pi c r_0^2 \int (1+\cos^2\theta)^2 \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{7}{5}\sigma_T c,$$

其中 $\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_0^2$. 因此得到 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2$ 的值，最后有

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 = \frac{2kT_e}{m_e c^2}(h\nu)^2 \sigma_T c + \frac{(h\nu)^4}{m_e c^4}\frac{7}{5}\sigma_T c. \quad (3.116)$$

因此，(3.116)式给出的 I 值已明显不同于(3.100)，多了一项.

完全类似于前面 Kompaneets 方程的推导，重复(3.101)式到(3.108)式的操作，仍然利用光子数在散射中守恒这一事实，可以从积分数值 I(见(3.116)式)导出积分值 H：

$$H = \frac{kT_e}{N_e}A(4x - x^2 + 6x^3 - Bx^4). \quad (3.117)$$

式中系数 $A = \left(\frac{kT_e}{m_e c^2}\right)N_e\sigma_T c$，$B = \frac{7}{10}\left(\frac{kT_e}{m_e c^2}\right)$.

将(3.116)和(3.117)式的 I, H 值代入(3.95)式，最后即得到

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{kT_e}{m_e c^2}N_e\sigma_T c \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{x^4\left(1 + \frac{7}{10}\frac{kT_e}{m_e c^2}x^2\right) \cdot \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(n+1)\right]\right\}, \quad (3.118)$$

(3.118)式就是最初的 Kompaneets 方程(3.110)式或者(3.112)式(当 $n \ll 1$ 时)的推广，所以叫做推广的 Kompaneets 方程(详细的推导可参见：陈军锋，尤峻汉，“中国科学 A”1993 年，第 23 卷，第 2 期，197. 或者 Journal of Physics A, Math. Gen., **27**, 2905, 1994). 它的重要意义在于限制条件十分宽松，仅为 $kT_e \ll m_e c^2$ 及 $h\nu \ll m_e c^2$. 而对 $h\nu$ 和 kT_e 之大小不做比较，既适用于 $h\nu \ll$

kT，也适用于 $h\nu\simeq kT$. 甚至适用于 $h\nu\gg kT$. 易见，当 $h\nu\ll kT$ 时，方程(3.118)还原为 Kompaneetz 方程(3.110)，对于弱辐射场，$n\ll 1$，(3.118)进一步还原为线性的 Kompaneets 方程(3.112). 特别值得注意的是，方程也适用于 $h\nu\gg kT$ 即康普顿软化情况（当然，必须要 $h\nu\ll m_ec^2$，$m_ec^2=511\text{keV}\simeq 0.5\text{MeV}$），所以(3.118)式在讨论 X 射线和低频 γ 射线段($h\nu\lesssim 0.5\text{MeV}$)的康普顿软化时非常有用，是目前讨论康普顿软化过程的理想的辐射转移方程.

如果辐射场在空间上不均匀，则 $n=n(\nu,r,t)$. 方程(3.118)中需要再加上空间扩散项 $\nabla\cdot(D\nabla n)$，其中 D 为扩散系数 $\left(D=\dfrac{c}{3N_e\sigma_c}\right)$，因此有

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{kT_e}{m_ec^2}N_e\sigma_T c\,\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{x^4\Big(1+\frac{7}{10}\frac{kT_e}{m_ec^2}x^2\Big)\\ \cdot\Big[\frac{\partial n}{\partial x}+n(n+1)\Big]\Big\}\\ +\nabla\cdot(D\nabla n).\end{aligned}\tag{3.119}$$

推广的 Kompaneets 方程对 X 射线和低频 γ 射线($h\nu\lesssim 0.5\text{MeV}$)天文学特别有用. 作为应用举例，这里讨论一个 X 射线点源（例如 X 射线密近双星中的吸积中子星或吸积黑洞）的辐射穿过周围吸积气体，经康普顿化后出射谱形的变化. 这类讨论经常采用等温均匀球模型，即简单认为周围吸积等离子体气体构成一个有限大半径 R、密度均匀的等温气体球. 若球中等离子体比较“冷”，则 X 射线出射前遭到康普顿软化. 等离子体的“冷”，“热”是相对 X 射线光子平均能量而言的. 当 $h\bar{\nu}\ll hT_e$，等离子体就是热的，当 $h\bar{\nu}\gg kT_e$，等离子体相对而言就是“冷”的（如果电子温度 $T_e\simeq 10^6$—10^7K，即 $kT_e\simeq 0.1$—1keV，听来很高，但若 X 光子 $h\bar{\nu}\simeq 10$keV（硬 X 射线），则该等离子体“很冷”）. 此时，康普顿软化对出射的 X 射线谱的影响可以通过给定初条件和边条件求解扩散方程(3.119)得到. 采用球坐标比较方便，原则上，初始条件和边界条件可以写为

$$
\left.\begin{aligned}
&n(x,0,t) = f(x) && (t \geqslant 0) \\
&n(x,r,0) = 0 && (0 < r < R) \\
&-D\frac{\partial n}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{c}{2}n(x,r,t)\bigg|_{r=R}
\end{aligned}\right\}. \tag{3.120}
$$

(3.120)式前两式表示，从 $t=0$ 开始，介质球中心处有一个稳定的 X 射线点源，其光子频谱分布函数为 $f(x)$. $x=h\nu/kT_e$ 是无量纲频率值. 第三式是所谓爱丁顿近似边界条件，即在各向同性辐射假设下，球面 R 处的光子流密度 $-D\frac{\partial n}{\partial r}\Big|_R$ 应等于此处光子密度和光速 c 乘积的一半. 在条件(3.120)式下求解(3.119)式，即得频率分布函数 $n(x,r,t)$.

但为了简化计算，可以不必采用(3.119)式和(3.120)式，而是利用初条件

$$
n(x,0) = f(x), \tag{3.121}
$$

直接求解不含空间扩散项 $\nabla\cdot(D\nabla n)$ 的"频率空间"扩散方程(3.118). 仍以含有中央点源的均匀散射球为例，说明这一简化计算的要点. 在初条件(3.121)中，$f(x)$ 仍表示 $t=0$ 时刻中央 X 射线点源的初始光子频谱分布. (3.118)式的解 $n(x,t)$ 表示经过扩散时间 t 后的频谱分布. 因此，为了最终得到从散射球表面出射的辐射能谱，关键是设法定出由点源出发的光子到达半径为 R 的散射球表面的"扩散时标"T，也就是光子的平均扩散时间. 按照 § 3.6，假如中心到球面的散射光深 $\tau_s=N_e\sigma_T R=R/\bar{l}_s$ 已知($\bar{l}_s$ 是散射平均自由程)，则光子到达球面时遭到的平均散射次数是 $N=\tau_s^2$ (当 $\tau_s>1$). 因此光子在球内的平均滞留时间就是 $T\simeq\frac{N\bar{l}_s}{c}=R^2/c\bar{l}_s=\frac{N_e\sigma_T R^2}{c}$，或 $T\simeq\tau_s R/c$. T 即所求"扩散时标". 它和参量(N_e,R)或者(τ_s,R)的取值有关. 将 T 值代入(3.118)式的解 $n(x,t)$ 中，即得出射频谱函数：

$$n = n(x, T), \tag{3.122}$$

而由球面出射的谱强度则为①

$$I(x, T) = I(x, R) \propto x^3 n(x, T). \tag{3.123}$$

利用方程组(3.118)及(3.121)，可以试计算以下两种形式的中央点源初始辐射谱在康普顿软化中的演化：

1. 初始辐射谱是高斯型发射谱线. 由于原子热运动或者发射区的团块整体无规运动，中央点源产生的 X 射线发射谱线将有高斯形的展宽. 初始的谱线单色强度分布将为

$$I_\nu = I_0 \exp[-c(\nu-\nu_0)^2], \tag{3.124}$$

ν_0 是谱线中心频率. 按照关系 $n \propto x^{-3} I_\nu$（见(3.123)式的脚注），初始谱可写为

$$n(x, 0) = f(x) \sim x^{-3} \exp[-c_1(x - x_0)^2], \tag{3.125}$$

其中 $x \equiv \frac{h\nu}{kT}$，　$x_0 \equiv \frac{h\nu_0}{kT}$.

2. 初始辐射谱为幂律连续谱，即

$$I_\nu \sim \nu^{-\alpha} \tag{3.126}$$

其中 α 是一常数，通常 $\alpha \sim 0.5$—1.0. 计算中取定 $\alpha = 0.7$. 故此时初条件形式为

$$n(x, 0) = f(x) \sim \begin{cases} x^{-3} x^{-\alpha}, x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ 0, \text{其它}, \end{cases} \tag{3.127}$$

其中 x_2, x_1 为幂律谱能量区间上下限.

方程(3.118)和(3.121)的求解，还需要给定三个模型参数，即 (T_e, N_e, R)，或者 (T_e, τ_s, R). 计算中取电子温度 $T_e = 10^6$K，扩散时标则取

$$t = \frac{N_e \sigma_T R^2}{c} = 0,\ 0.001,\ 0.01(\mathrm{s}) \tag{3.128}$$

计算的康普顿软化后出射谱示于图 3.7(a)和(b)中. (a)为谱

---

① 因辐射场能密度为 $u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu n(\nu, t) h\nu \propto nx^3$，故辐射强度为 $I_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu \propto nx^3$，以及 $n(x) \propto x^{-3} I_\nu$.

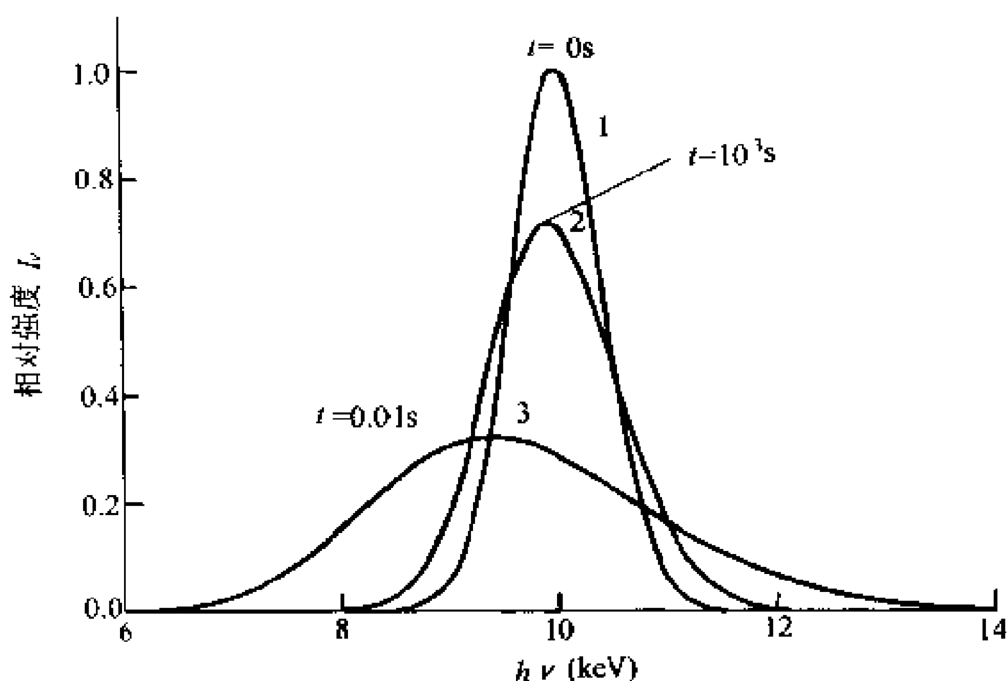


图 3.7(a) 初始谱为高斯形发射线(曲线 1).
曲线 2 和曲线 3 分别对应于散射时标 t=0.001s 和 t=0.01s 时的出射谱轮廓

线的变化(初始为高斯型,曲线 1 表示未经康普顿化的初始谱形),(b)为初始为幂律形连续谱(曲线 1)的变化.两图中曲线 2 和曲线 3 分别对应于扩散时间 t=0.001s 及 0.01s 的出射谱形.

由图 3.7(a)可见,康普顿软化影响显著,可以使出射的 X 发射线发生变形和红移(不妨称为"康普顿红移").谱线轮廓也不再左右对称,而是低频端陡化,高能端相对平坦.康普顿软化对原始幂律形连续谱的显著影响示于图 3.7(b),它使出射谱的高能端陡化.这就说明软化过程中,高能光子有向低频端移动的趋势,造成低频端光子的"堆积".

§3.9 推广的辐射转移方程——考虑介质折射率的影响

在推导辐射转移方程(3.19)时,只考虑了介质的吸收和辐射作用引起的强度变化,而忽略了介质折射率的不均匀性造成的强

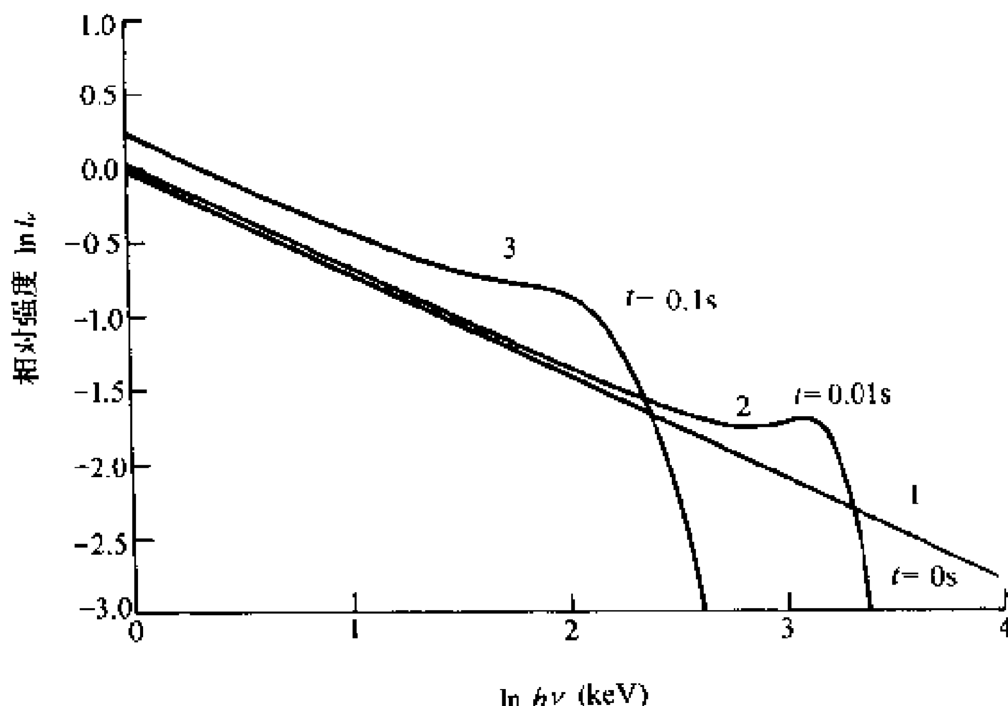


图 3.7(b) 初始谱为幂律形连续谱(曲线 1).
曲线 2 和 3 分别对应于 $t=0.01$s 和 $t=0.01$s 时的出射谱形

度变化. 自然,在多数情况下,由于气体的折射率 $n_\nu \simeq 1$,从而这种忽略是合理的. 但在有些情况下不能这样做,例如在等离子体中的微波和射电辐射,如果辐射频率已经接近于等离子体频率 ν_p,这时的折射率将显著地不等于 1,并且数值显著地依赖于介质密度.

介质折射率的不均匀性除了会使得辐射一般不再沿直线传播之外,另一重要的影响是它将使辐射强度在传播过程中发生改变. 试考虑一束张有确定立体角 $d\omega$ 的辐射束,当它由光疏介质进入光密介质时,由于折射,它所张的立体角 $d\omega'$ 将会减小,从而辐射强度增大.

图 3.8 中画出底面积为 $d\sigma$、厚度为 ds 的气体柱,强度为 $I_{\nu1}$ 的辐射以 θ_1 的倾角射入偏柱体,由于介质不均匀性,将以 θ_2 角射出,并且强度成为 $I_{\nu2}$. 在 dt 时间内,沿 θ_1 方向的立体角元 $d\omega_1$,进入柱体的能量为

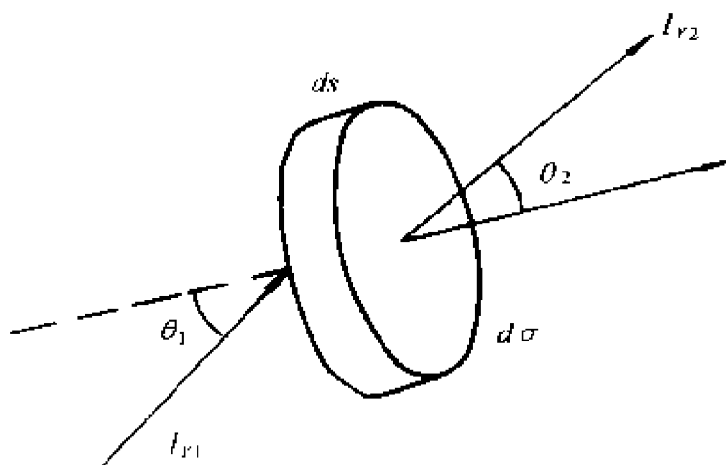


图 3.8

$$dE^{\text{in}} = I_{\nu1}\cos\theta_1 d\sigma d\nu dt d\omega_1,$$

射出柱体能量为

$$dE^{\text{out}} = I_{\nu2}\cos\theta_2 d\sigma d\nu dt d\omega_2.$$

假定介质既不吸收又不辐射,则应有

$$dE^{\text{in}} = dE^{\text{out}},$$

即

$$I_{\nu2}\cos\theta_2 d\omega_2 = I_{\nu1}\cos\theta_1 d\omega_1. \tag{3.129}$$

按照折射定律,沿射线方向有

$$n\sin\theta = \text{const.},$$

或者

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2,$$

n 是折射率. 因此立体角之比为

$$\frac{d\omega_2}{d\omega_1} = \frac{\sin\theta_2 d\theta_2}{\sin\theta_1 d\theta_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cdot\frac{n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2},$$

代入(3.129)式,于是有

$$\frac{I_{\nu2}}{n_2^2} = \frac{I_{\nu1}}{n_1^2},$$

即沿射线方向有

$$\frac{I_\nu}{n_\nu^2} = \text{const.} \tag{3.130}$$

因此，在一个折射率缓慢变化的不均匀介质中，即使介质本身没有吸收和辐射，强度也会沿射线路径而改变. 折射率大的地方，强度也大.

由(3.130)式可以求出，沿着射线的方向，由于折射率的变化而引起的强度变化率. 将此变化率记做$\frac{\partial I_\nu}{\partial s}$，

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \frac{2I_\nu}{n_\nu}\frac{dn_\nu}{ds}. \tag{3.131}$$

考虑到(3.131)式以后，强度随路程的总变化率应为三项的和

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{\partial I_\nu}{\partial s} - k_\nu I_\nu + j_\nu,$$

或者

$$n_\nu^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{I_\nu}{n_\nu^2}\right) = j_\nu - k_\nu I_\nu,$$

定义源函数为

$$S_\nu \equiv \frac{1}{n_\nu^2}\frac{j_\nu}{k_\nu}, \tag{3.132}$$

并且用$d\tau_\nu = k_\nu ds$ 代替 ds，则有

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\left(\frac{I_\nu}{n_\nu^2}\right) = S_\nu - \frac{I_\nu}{n_\nu^2}. \tag{3.133}$$

(3.133)式即普遍形式的辐射转移方程，它把介质折射率空间不均匀的影响也考虑进去了.

代替(3.20)式，方程(3.133)的形式解应为

$$\frac{I_\nu(B)}{n_\nu^2(B)} = \frac{I_\nu(A)}{n_\nu^2(A)}e^{-\tau_0} + \int_0^{\tau_0} e^{-\tau}S_\nu(\tau)d\tau. \tag{3.134}$$

对于局部热平衡介质，注意源函数为

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu n_\nu^2} = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1}. \tag{3.135}$$

因此，对于一个处于局部热平衡状态的，厚度为 L 的均匀介质(温度处处为 T)，射出界面的辐射强度应为

$$I_\nu^{\text{out}} = n_\nu^2(0)\int_0^{\tau_\nu(L)} S_\nu(\tau)e^{-\tau}d\tau$$

$$= n_\nu^2(0)B_\nu(T)[1 - \exp(-\tau_\nu(L))],$$

其中 $n_\nu^2(0)$ 代表界面处的介质折射率. 因此，对于光学厚介质，即 $\tau_\nu(L) = k_\nu L \gtrsim 1$，应有

$$I_\nu^{\text{out}} = n_\nu^2(0)B_\nu(T).$$

对于光学薄介质，$\tau_\nu(L) = k_\nu L \ll 1$，应有

$$I_\nu^{\text{out}} = n_\nu^2(0)B_\nu(T)\tau_\nu(L),$$

亦即

$$I_\nu^{\text{out}} = n_\nu^2(0)k_\nu LB_\nu(T).$$

§3.10 斯托克斯参量的辐射转移方程举例(逆塞曼效应)①

前面讨论的是非偏振的自然波的辐射转移方程，该方程只是确定了光波在介质中传播时强度的变化. 对于一般介质(中性气体，等离子体等)而言，给出传播中强度的变化也就足够了. 但若存在一定的静磁场，则将改变介质的光学性质，从而传播中不仅是强度发生改变，一般而言，还改变了辐射的偏振状态. 为了不仅能描写强度的变化，还能描写偏振状态的变化，就必须研究偏振辐射的转移问题. 其办法是将前面的辐射转移方程推广成关于斯托克斯参量的辐射转移方程. 现已知道，四个斯托克斯参量(I, Q, U, V)足以确定辐射的偏振状态，而且四个量都具有强度量纲，最便于用来建立辐射转移方程. 但请注意，对于偏振辐射的转移问题，尽管提出的任务都是建立斯托克斯参量的转移方程，然而方程的具体形式将由该介质对偏振波的特殊的吸收和发射(有时还考虑法拉第效应)性质所决定. 不同介质(例如、究竟是中性气体还是等离子体；介质究竟是否处于局部热动平衡；究竟带不带磁场等等)对辐射波的偏振状态有不同的影响，不可能指望斯托克斯参量的转移方程有着统一的普遍适用的形式.

---

① 对逆塞曼效应不感兴趣的读者可越过这一节.

例如，为了给逆塞曼效应以理论解释，海野和三郎(W. Unno)建立了关于热平衡的、有磁场的中性气体介质的斯托克斯参量的转移方程. 这里简单介绍他的方程推导. 尽管这组方程不具普适性，不适用于其它偏振辐射的转移过程——例如同步加速辐射的偏振问题，但仍有启发作用，有助于了解如何从介质性质出发，引出该介质的斯托克斯参量的转移方程.

正塞曼效应指的是磁场中原子的一条发射谱线的三分裂现象(这是正常塞曼效应，顺着磁场方向看，只有两条谱线)，而逆塞曼效应则是关于连续谱背景上一条吸收谱线的三分裂现象(类似于正效应，正顺着磁力线观测时，只有两条吸收线). 三条吸收线有着不同的偏振状态，海野建立的偏振辐射的转移方程，就是为了解释这三条带偏振的吸收线.

建立这组方程之前，先从物理上说明，为什么介质中有了一定的静磁场，就会使辐射的偏振状态在传播中发生改变，这要从介质原子中的电子行为说起. 在经典物理中，原子中电子被看成为一个振子，以准弹力$-k\boldsymbol{r}$与原子核作用着，方程为

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}}+k\boldsymbol{r}=0$$

或者

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\omega_0^2\boldsymbol{r}=0$$

其中$\omega_0^2=\dfrac{k}{m_0}$. 这表示原子中电子是一个固有频率为$\omega_0$的振子，能发射或吸收频率$\omega_0$的辐射.

当磁场存在时，出现一附加的洛伦兹力$\left[-\dfrac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right]$，电子运动方程成为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\omega_0^2\boldsymbol{r}=-\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}. \qquad (3.136)$$

为了写成简便的分量式，取$\boldsymbol{H}$的方向为z轴正向，即

$$H_x=H_y=0,\qquad H_z=H.$$

再把$\dfrac{eH}{m_0c}$记为$2o$，$2o\equiv\dfrac{eH}{m_0c}$，则可写出(3.136)式的三个分量式：

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x+2o\,\dot{y}=0,$$
$$\ddot{y}+\omega_0^2 y-2o\,\dot{x}=0,$$
$$\ddot{z}+\omega_0^2 z=0. \tag{3.137}$$

可以设(3.137)的前两个式子有如下形式的解：

$$x=ae^{i\omega t},y=be^{i\omega t}. \tag{3.138}$$

这里a,b一般是复数.将(3.138)代入(3.137)得到

$$\begin{aligned} a(\omega_0^2-\omega^2)+2io\omega b=0, \\ b(\omega_0^2-\omega^2)-2io\omega a=0. \end{aligned} \tag{3.139}$$

要使a,b有非零解，应当系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & 2i\omega o \\ -2i\omega o & \omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0,$$

故

$$(\omega_0^2-\omega^2)=4o^2\omega^2,$$

或者

$$(\omega_0^2-\omega^2)=\pm 2o\omega.$$

这两个二次方程的四个解中只有两个是正值，

$$\omega'=-o+\sqrt{\omega_0^2+o^2}\simeq\omega_0-o,$$
$$\omega''=o+\sqrt{\omega_0^2+o^2}\simeq\omega_0+o$$

(因为$2o=\dfrac{eH}{m_0c}\ll\omega_0$).

将$\omega'=\omega_0-o$代入(3.139)式，得到

$$\frac{a}{b}=-i\frac{2o\omega'}{\omega_0^2-\omega'^2}=-i,$$

或者

$$a=-ib=be^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

代入(3.138)式，即可知与$\omega'=\omega_0-o$频率相应的电子运动形式是，电子沿x轴方向的振动比沿y方向的振动落后一相角$\frac{\pi}{2}$，频率则同为ω'.合成的结果是，电子将以ω'的角速度作右旋的(顺时

针)圆周运动,圆周在 xy 平面,即垂直磁场 $\boldsymbol{H}$ 的平面上.这种运动可以产生右旋的椭圆偏振光(特别是沿磁力线方向上,产生右旋圆偏振光,而在 xy 平面上的任一方向,则是线偏振光).

类似可证明,与 $\omega'=\omega_0+o$ 相应的电子运动是右旋圆周运动,产生左旋椭圆偏振光,电子圆周轨道同样是在垂直 $\boldsymbol{H}$ 的平面上.

解(3.137)第三个分量式

$$\ddot{z}+\omega_0^2 z=0,$$

则表明电子沿磁场方向(z 轴)的运动不受磁场影响,仍是以 ω_0 振动的振子.

总之,介质外加磁场后,原子中电子的运动等效于三个振子:一个是沿磁场方向频率为固有频率 ω_0 的谐振子,另两个是在垂直磁场的平面上具有相反旋转方向的圆周运动(圆周运动实即二维振子)的振子.其中一个频率为

$$\omega_0-o=\omega_0-\frac{eH}{2mc}$$

是右旋振子.另一个频率为 $\omega_0+o=\omega_0+\frac{eH}{2mc}$ 是左旋振子.它们可分别产生频率为 $\omega_0,\omega_0-o,\omega_0+o$ 的三条谱线发射,这是正常的正塞曼效应的经典理论中为大家熟悉的概念.常常形式地把这三种振子分别叫做 p-电子,r-电子,l-电子.正是这些振子的吸收和发射作用,会引起穿过介质的辐射波的偏振状态变化(因为这些振子的吸收和发射都是带偏振的).

图3.9中,z 轴正方向代表某一给定的入射偏振光传播方向,x 轴选在磁场 $\boldsymbol{H}$ 方向和 z 轴所构成的平面内,y 轴则垂直于 z 轴和 x 轴.一束沿 z 正向传播的偏振光可以分解为

$$\begin{aligned}\xi_x&=\xi_1\cos(\omega t-\varepsilon_1),\\ \xi_y&=\xi_2\cos(\omega t-\varepsilon_2).\end{aligned}\qquad(3.140)$$

按照第一章,描写它的偏振性质的一组斯托克斯参量是

$$\boldsymbol{I}=(I,Q,U,V),$$

其中

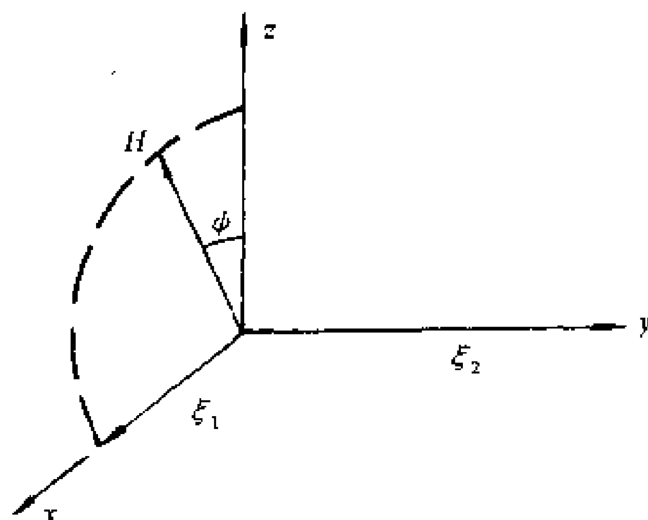


图 3.9

$$I=I_1+I_2, \quad Q=I_1-I_2, \quad I_1=\overline{\xi_1^2}, \quad I_2=\overline{\xi_2^2},$$

$$U=\overline{2\xi_1\xi_2\cos(\varepsilon_1-\varepsilon_2)},$$

$$V=\overline{2\xi_1\xi_2\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}.$$

建立斯托克斯参量(I,Q,U,V)的辐射转移方程，就要考虑介质的吸收发射作用．用$k_p(\nu)$，$k_l(\nu)$，$k_r(\nu)$分别表示p-，l-，r-电子的选择吸收系数．例如，一束沿磁场方向传播的左旋圆偏振光强度为I，经过路程ds后，则吸收就是$-k_lIds$．从物理上不难理解，这三个线吸收系数（选择吸收系数）之间应有如下关系：

$$k_p(\nu)=k_l(\nu\mp\Delta\nu_H)=k_r(\nu\pm\Delta\nu_H)=k\nu, \qquad (3.141)$$

式中$\Delta\nu_H\equiv\frac{eH}{4\pi m_0c}$．上式说明：$k_p$，$k_l$，$k_r$都与没有磁场时的吸收系数$k_\nu$一样，仅有的差异是$k_l$，$k_r$的本征吸收频率有$\pm\Delta\nu_H$的频移．

以下推导中还引入记号

$$\eta_p=k_p/k, \eta_l=k_l/k \text{ 和 } \eta_r=k_r/k, \qquad (3.142)$$

即$\eta_\nu=k_\nu/k$为谱线内的选择吸收系数k_ν与连续谱吸收系数k之比．

在局部热动平衡条件下，p-，l-，r-电子发射系数也容易利用吸收与发射之间的基尔霍夫定律得到．

先考查由于 p-电子吸收造成的传播中斯托克斯参量的改变. 因为 p-电子只吸收平行磁场 $\boldsymbol{H}$ 的电矢分量(图 3.9)即只吸收 ξ_1 分振动, 对 ξ_2 不吸收. 由于 p - 振子对于沿 z 方向传播的辐射的有效吸收系数是 $k_p\sin^2\psi$. 沿 z 轴传播的辐射通过距离 Δz 后, 强度 I_1 的改变为

$$\Delta I_1 = - k_p\sin^2\psi I_1\Delta z. \tag{3.143}$$

将 $I_1=\xi_1^2$ 代入上式, 得到

$$\Delta\xi_1^2 = - k_p\sin^2\psi\xi_1^2\Delta z,$$

或者

$$\Delta\xi_1 = - \frac{1}{2}k_p\sin^2\psi\xi_1\Delta z.$$

因此, 在 p-振子的吸收下, 斯托克斯参量的改变为

$$\begin{aligned}
\Delta I_1 &= - k_p\Delta z\sin^2\psi I_1,\\
\Delta I_2 &= 0,\\
\Delta U &= - \frac{k_p}{2}\Delta z\sin^2\psi U\ (p\text{- 吸收}),\\
\Delta V &= - \frac{k_p}{2}\Delta z\sin^2\psi V.
\end{aligned} \tag{3.144}$$

计算 l-电子和 r-电子的吸收较麻烦, 原因是 l-电子只吸收左旋椭圆偏振光, r-电子则反之. 左旋偏振辐射可表示为

$$\begin{aligned}
\xi_{lx} &= a\cos\psi\cos(\omega t - \delta_1),\\
\xi_{ly} &= a\cos\left(\omega t - \delta_1 - \frac{\pi}{2}\right);
\end{aligned} \tag{3.145}$$

而右旋波则可表示为

$$\begin{aligned}
\xi_{lx}^{*} &= b\cos(\omega t - \delta_2),\\
\xi_{ly}^{*} &= b\cos\psi\cos\left(\omega t - \delta_2 + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned} \tag{3.146}$$

按第一章 1.4.3 节, 沿 z 轴传播的任意偏振波总可表为两束强度不等的、独立的相反偏振波(即长轴互相垂直, 旋向相反, 而椭率模值又相同的两个椭圆偏振波)的混合. 因此, 沿 z 轴传播的原始入射波(3.140)式可表示为右旋和左旋椭圆偏振波之和, 即

$$\xi_x = \xi_{lx} + \xi_{lx}^*,$$
$$\xi_y = \xi_{ly} + \xi_{ly}^*. \tag{3.147}$$

按照(3.147)和前面的(3.140)式下面的(I,Q,U,V)的定义可求出：

$$a^2 = \frac{1}{(1+\cos^2\psi)^2}[I_1\cos^2\psi + I_2 - V\cos\psi],$$
$$b^2 = \frac{1}{(1+\cos^2\psi)^2}[I_1 + I_2\cos^2\psi + V\cos\psi]. \tag{3.148}$$

以及

$$\begin{aligned} I_1 &= a^2\cos^2\psi + b^2 + 2ab\cos\psi\cos(\delta_1-\delta_2), \\ I_2 &= a^2 + b^2\cos^2\psi - 2ab\cos\psi\cos(\delta_1-\delta_2), \\ U &= -2ab(1+\cos^2\psi)\sin(\delta_1-\delta_2), \\ V &= 2[-a^2\cos\psi + b^2\cos\psi - ab\cos(\delta_1-\delta_2)\sin^2\psi]. \end{aligned} \tag{3.149}$$

实际上，a^2、b^2，$2ab\cos(\delta_1-\delta_2)$和 $2ab\sin(\delta_1-\delta_2)$可以看成为广义斯托克斯参量. 对于由(3.147)—(3.149)式表示的入射光，由于l-电子的吸收，将只会影响其中左旋椭圆偏振光的强度a^2，由此求得

$$\Delta a^2 = -k_l\frac{1+\cos^2\psi}{2}a^2\Delta z, \tag{3.150}$$

或者

$$\Delta a = -\frac{k_l}{4}(1+\cos^2\psi)a\Delta z.$$

可见，当磁场和传播方向成ψ角时，l-电子对左旋光的有效吸收系数应为$k_l\dfrac{(1+\cos^2\psi)}{2}$.

由(3.149)和(3.150)式，即得l-电子吸收造成的变化为

$$\Delta I_1 = -\frac{k_l}{4}\Delta z(2I_1\cos^2\psi - V\cos\psi),$$
$$\Delta I_2 = -\frac{k_l}{4}\Delta z(2I_2 - V\cos\psi) \quad (l\text{-吸收}),$$
$$\Delta U = -\frac{k_l}{4}\Delta z U(1+\cos^2\psi), \tag{3.151}$$

$$\Delta V = -\frac{k_l}{4}\Delta z[-2I_1\cos\psi - 2I_2\cos\psi + (1+\cos^2\psi)V].$$

类似可找到由于 r-电子对右旋光吸收引起的改变：

$$\Delta I_1 = -\frac{k_r}{4}\Delta z[2I_1\cos^2\psi + V\cos\psi],$$

$$\Delta I_2 = -\frac{k_r}{4}\Delta z[2I_2 + V\cos\psi] \quad (r\text{- 吸收}),$$

$$\Delta U = -\frac{k_r}{4}\Delta z U[1+\cos^2\psi],$$

$$\Delta V = -\frac{k_r}{4}\Delta z[2I_1\cos\psi + 2I_2\cos\psi + (1+\cos^2\psi)V].$$

$$(3.152)$$

(3.144)，(3.151)和(3.152)式就是由于 p-，l-，r-电子的选择吸收造成的斯托克斯参量的改变.

最后，还必须考虑连续谱吸收造成的改变

$$\left.\begin{aligned}\Delta I_1 &= -k\Delta z I_1,\\ \Delta I_2 &= -k\Delta z I_2,\\ \Delta U &= -k\Delta z U,\\ \Delta V &= -k\Delta z V,\end{aligned}\right\} \quad (\text{连续吸收}) \quad (3.153)$$

k 是连续谱吸收系数. (3.153)式表明，这种吸收本身不会改变辐射的偏振，它是非偏振吸收.

按照(3.144)，(3.151)，(3.152)，(3.153)等式，总吸收为

$$\Delta I_1 = -k\Delta z\left[\left(1+\eta_p\sin^2\psi + \frac{\eta_l+\eta_r}{2}\cos^2\psi\right)I_1 + \frac{-\eta_l+\eta_r}{4}\cos\psi V\right],$$

$$\Delta I_2 = -k\Delta z\left[\left(1+\frac{\eta_l+\eta_r}{2}\right)I_2 + \frac{-\eta_l+\eta_r}{4}\cos\psi V\right],$$

$$\Delta U = -k\Delta z\left[1+\frac{\eta_p}{2}\sin^2\psi + \frac{\eta_l+\eta_r}{4}(1+\cos^2\psi)\right]U,$$

$$\Delta V = -k\Delta z\left[\frac{-\eta_l+\eta_r}{2}\cos\psi(I_1+I_2)\right.$$

$$+\left\{1+\frac{\eta_p}{2}\sin^2\psi+\frac{\eta_l-\eta_r}{4}(1-\cos^2\psi)\right\}V\Big],$$

(3.154)

其中

$$\eta_p = k_p/k, \eta_l = k_l/k, \eta_r = k_r/k.$$

第二步是考虑介质的发射，假如系统是处在局部热平衡，再考虑到 p-，l-，r-电子辐射的偏振特性及连续谱辐射是非偏振的，可以得到，对于 p-电子的发射，应有

$$\Delta I_1 = k_p \Delta z \sin^2\psi \frac{B}{2},$$

$$\Delta I_2 = 0, \quad \Delta U = 0 \text{ 及 } \Delta V = 0\text{①} \tag{3.155}$$

而对于 l-发射，应有

$$\Delta I_1 = k_l \Delta z \frac{\cos^2\psi}{2}\frac{B}{2}, \quad \Delta I_2 = k_l \Delta z \frac{1}{2}\frac{B}{2},$$

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = -k_l \Delta z \frac{\cos\psi}{2}B. \tag{3.156}$$

关于 r-发射，类似有

$$\Delta I_1 = k_r \Delta z \frac{\cos^2\psi}{2}\frac{B}{2}, \quad \Delta I_2 = k_r \Delta z \frac{1}{2}\frac{B}{2},$$

$$\Delta U = 0, \quad \Delta V = k_r \Delta z \frac{\cos\psi}{2}B. \tag{3.157}$$

最后，对于连续谱发射，应有

---

① 关于 ΔI_1 的等式是由于局部热平衡条件下基尔霍夫定律(3.12)成立，这里只需注意 $\Delta I_1 = j_1 \Delta z$（$j_1$ 是偏振光 ξ_x 的谱发射系数），以及有效吸收系数 $k_p \sin^2\psi$［参见(3.144)前面的说明］. 另外，现在要用$\frac{B}{2}$代替(3.12)中的普朗克函数 B，原因是(3.12)式是针对自然光的，有两个独立的、等强度的偏振方向. 关于 ΔI_2 的等式则是由于 p-电子的辐射是偏振的，只产生 I_1 的增量（请对照图 3.9）. 最后两式 $\Delta U = 0$ 及 $\Delta V = 0$，则是根据 U，V 的定义：

$$U = \overline{2\xi_1\xi_2\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)},$$

$$V = \overline{2\xi_1\xi_2\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)},$$

以及 p-发射中恒有 $\xi_2 = 0$，且相角 ε_1 随机取值.

$$\Delta I_1 = k\Delta z \frac{B}{2}, \quad \Delta I_2 = k\Delta z \frac{B}{2},$$

$$\Delta U = 0, \quad \Delta V = 0. \tag{3.158}$$

由(3.155),(3.156),(3.157),(3.158)等式得到总发射为

$$\Delta I_1 = k\Delta z\left[1 + \eta_p \sin^2\psi + \frac{\eta_l + \eta_r}{2}\cos^2\psi\right]\frac{B}{2},$$

$$\Delta I_2 = k\Delta z\left[1 + \frac{\eta_l + \eta_r}{2}\right]\frac{B}{2},$$

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta V = k\Delta z \frac{-\eta_l + \eta_r}{2}\cos\psi B. \tag{3.159}$$

由(3.159)式注意到,发射过程中,$\Delta U=0$;再由(3.154)可见,U 的变化与其它几个参量无关,故可取 $U=0$. 这样一来,需要建立的斯托克斯参量方程实际上只有三个参量的辐射转移方程. 由(3.154)式和(3.159)式可得辐射转移方程组为

$$\begin{aligned}
\cos\theta \frac{dI_1}{d\tau} &= \left(1 + \eta_p \sin^2\psi + \frac{\eta_l + \eta_r}{2}\cos^2\psi\right)\left(I_1 - \frac{B}{2}\right) \\
&\quad + \frac{-\eta_l + \eta_r}{4}\cos\psi V, \\
\cos\theta \frac{dI_2}{d\tau} &= \left(1 + \frac{\eta_l + \eta_r}{2}\right)\left(I_2 - \frac{B}{2}\right) + \frac{-\eta_l + \eta_r}{4}\cos\psi V, \\
\cos\theta \frac{dV}{d\tau} &= \frac{-\eta_l + \eta_r}{2}\cos\psi (I_1 + I_2 - B) \\
&\quad + \left\{1 + \frac{\eta_p}{2}\sin^2\psi + \frac{\eta_l + \eta_r}{4}(1 + \cos^2\psi)\right\}V
\end{aligned} \tag{3.160}$$

其中 $d\tau$ 是连续光谱的元光深,

$$d\tau = -kdz\sec\theta,$$

θ 是辐射方向和日面法线方向的交角.

用(I,Q,U,V)代替(I_1,I_2,U,V),则由(3.160)式可得斯托克斯参量的辐射转移方程组为

$$\cos\theta \frac{dI}{d\tau} = (1+\eta_I)I + \eta_Q Q + \eta_V V - (1+\eta_I)B,$$

$$\cos\theta \frac{dQ}{d\tau} = \eta_Q I + (1+\eta_I)Q - \eta_Q B,$$

$$\cos\theta \frac{dV}{d\tau} = \eta_V I + (1+\eta_I)V - \eta_V B. \qquad (3.161)$$

其中，

$$I = I_1 + I_2, Q = I_1 - I_2,$$

$$\eta_I = \frac{\eta_p}{2}\sin^2\psi + \frac{\eta_l + \eta_r}{4}(1+\cos^2\psi),$$

$$\eta_Q = \left(\frac{\eta_p}{2} - \frac{\eta_l + \eta_r}{4}\right)\sin^2\psi,$$

$$\eta_V = \left(\frac{-\eta_l + \eta_r}{2}\right)\cos\psi.$$

限于篇幅，本书只限于导出斯托克斯参量的辐射转移方程(3.161)而不讨论它的求解及实际应用，特别是对逆塞曼效应(即有偏振的三重吸收线)的应用(详见 Unno, *Publ. Astro. Soc. Japan*. **8**, 1956, 108).

以后，又有人推广了方程组(3.161)，把斯托克斯参量的辐射转移方程写成下列矩阵形式(详见 Stenflo, J. O., "Solar Magnetic Fields", ed. R. Howard, 1971)：

$$\cos\theta \frac{d\boldsymbol{I}}{d\tau} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}), \qquad (3.162)$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是辐射强度矢量，

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U \\ V \end{pmatrix}, \qquad (3.163)$$

$$I_1 = \overline{\xi_1^2}, \quad I_2 = \overline{\xi_2^2},$$

$$U = \overline{2\xi_1\xi_2\cos(\epsilon_1 - \epsilon_2)}, \quad V = \overline{2\xi_1\xi_2\sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)}.$$

$\mathbf{1}$ 是单位矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是能源函数向量，

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.164}$$

B 是普朗克函数. 至于吸收系数矩阵 $\boldsymbol{\eta}$ 则为

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & b & c \\ 0 & a_- & b & c \\ b & b & \frac{a_+ + a_-}{2} & 0 \\ c & c & 0 & \frac{a_+ + a_-}{2} \end{pmatrix} \tag{3.165}$$

其中

$$a_\pm = \frac{1}{2}\left[\eta_p - \frac{1}{2}(\eta_l + \eta_r)\right]\sin^2\psi(1 \pm \cos 2\chi) + \frac{1}{2}(\eta_l + \eta_r),$$

$$b = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\eta_p - \frac{1}{2}(\eta_l + \eta_r)\right]\sin^2\psi \sin 2\chi,$$

$$c = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\eta_l - \eta_r)\cos\psi.$$

可以证明,海野的方程组(3.161)($\chi=0, U=0$)可由普遍形式(3.162)推导出来.

具体作数字计算时,公式(3.161)或(3.162)中的吸收系数比 η_p, η_l, η_r 随波长变化的具体函数形式需要给出,海野采用的是多普勒谱形(高斯型曲线),

$$\eta_p = \eta_0 e^{-U^2}, \quad \eta_l = \eta_0 e^{-(U-U_H)^2}, \quad \eta_r = \eta_0 e^{-(U+U_H)^2}, \tag{3.166}$$

其中 η_0 为谱线中心的吸收系数与连续吸收系数之比. $U \equiv (\lambda - \lambda_0)/\Delta\lambda_D = \Delta\lambda/\Delta\lambda_D$, $U_H \equiv \Delta\lambda_H/\Delta\lambda_D$, $\Delta\lambda_D$ 是谱线的多普勒半宽度,

$\Delta\lambda_H = \frac{eH\lambda^2}{4\pi m_0 c^2}$.

§3.11 分子脉泽源中的辐射转移方程

对处于通常热平衡状态下的介质，$k_\nu>0$，即其吸收系数总是正的. 如果介质温度不算高，即可忽略介质本身微弱的自发辐射($j_\nu\simeq0$). 这时转移方程为

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -k_\nu I_\nu,$$

其中 $k_\nu>0$. 若简单假定介质是厚度 L 的均匀介质层，则其解为

$$I_\nu(s) = I_\nu^0 e^{-k_\nu L},$$

其中 I_ν^0～入射处的初始强度. 上式表明，在通常的介质中传播时，辐射是按指数衰减的.

但在有些情况下，介质会由于某种外界"抽运"作用而受到激励，使介质远离热平衡状态. 当按能级的分布出现"粒子数反转"时(即上能级粒子数大于下能级粒子数)，介质的"吸收系数"将成为负值，$k_\nu<0$[读者可联系(3.33)式来了解这一点，反转时，下能级粒子数 N_n<上能级粒子数 N_m，故有 $k_\nu<0$]. 从而在该介质中传播的辐射非但不衰减，反而指数式地增加. 这就是光在激活介质中的受激放大过程的大致说明，亦即通常说的激光(laser)和脉泽(Maser)过程. 脉泽过程在说明许多分子辐射源的射电发射线的性质时，受到普遍的重视. 为此，首先简单介绍一下天体物理中的分子脉泽源的性质.

60 年代射电天文学的重大成果之一是发现了星际有机分子，目前已认证的星际分子达 100 多种，但数量最多的是羟基分子 OH. 现已确认的 OH 分子源大约有 1 000 多个. 因此，对 OH 分子射电发射线的研究具有基本重要性. 羟基源的最显著特征或许是辐射的非热性质，主要表现在以下几个方面：

1. 线辐射具有极高的强度，相应的亮温度 T_B 高达～10^{11} K. 而另一方面，OH 分子射电谱线很窄，相应的分子热运动温度仅～

100K. 这是热平衡辐射机制不能解释的.

2. 反常的谱线相对强度比. 对于热平衡辐射,OH 分子基态的四条微波谱线(1612MHz,1665MHz,1667MHz,1720MHz)的相对强度比是 1 : 5 : 9 : 1,然而实际上常常是只出现一条或两条谱线(例如,只出现 1720MHz 线),并且观测比值与热平衡比值相差较大.

3. 这些发射线常常是高度偏振的,有时偏振度高达 100%. 热辐射则是非偏振的.

4. 显著的时变特征. 许多羟基源的光变时标仅为一个月($\sim 10^7$s). 如果是热平衡辐射,则时变时标当为自发跃迁概率的倒数,即 $A_{12}^{-1} \sim 10^{10}$s. 显然此值远大于羟基源的观测值.

通常把这些非热 OH 分子源称为脉泽源,因为迄今为止,已知的非热平衡微波谱线发射机制只有脉泽(即微波辐射的受激放大). 现已建立了开动天体脉泽的各种抽运模型,例如,微波抽运、红外抽运、紫外抽运以及碰撞-化学抽运等(例如,参见:D. T. Haar and M. A. Pelling ,*Rep. Prog. Phys.* ,**37**,483,1974). 借助于这些抽运过程,可以建立 OH 分子基态的 Λ 双重能级上的粒子数反转,从而使辐射在传播中得到增强. 这种脉泽机制可以说明非热平衡 OH 辐射源的一系列辐射特征.

若要定量了解脉泽机制,就必须建立激活介质(脉泽辐射源)中的辐射转移方程. 仍以 OH 分子源作为具体例子予以说明. 图 3.10 表示 OH 分子基态能级及跃迁图,左方数字是基态四能级标号,基态的"Λ 双重分裂"能级分成具有正宇称(3、4)和负宇称(1、2)的两组,又由于核自旋作用,这两组能级又分别分裂成两个超精细结构能级,构成基态的四能级系统. 图右方的数字是总角动量量子数 F(包括核自旋)的值. 若以 N_i,g_i($i=1,2,3,4$)分别表示各能级分子数密度及简并度($g_i=2F+1$),则比值 N_i/g_i 即为能级 i 中每一简并态上之平均分子数密度.

假定由于某种抽运作用(限于篇幅,这里不去讨论抽运过程和速率方程等重要观念),使 OH 分子云远离热平衡状态,并在其中

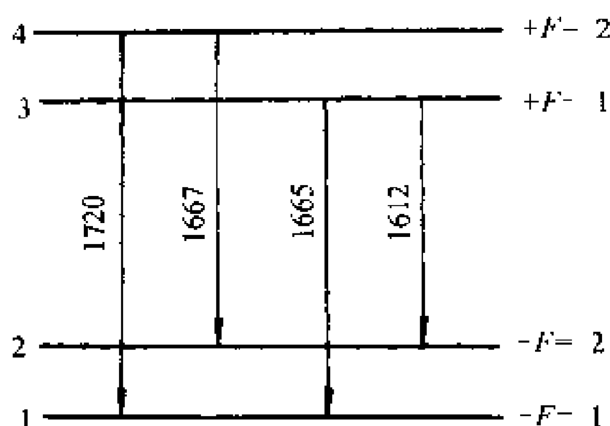


图 3.10

一对能级上——例如图中的能级 4 和 1(它们对应于 1720MHz 谱线)——造成了反转. 假定反转后的粒子数分布由图 3.11 表示,其中 $N_4/g_4=N_2/g_2$,$N_3/g_3=N_1/g_1$,并且 $N_4/g_4>N_1/g_1$,即能级 4,1 之间有反转. 现考查由于这种反转如何形成了 1720MHz 线在传播中的增强. 为此,必须建立 1720MHz 频率处的辐射转移方程.

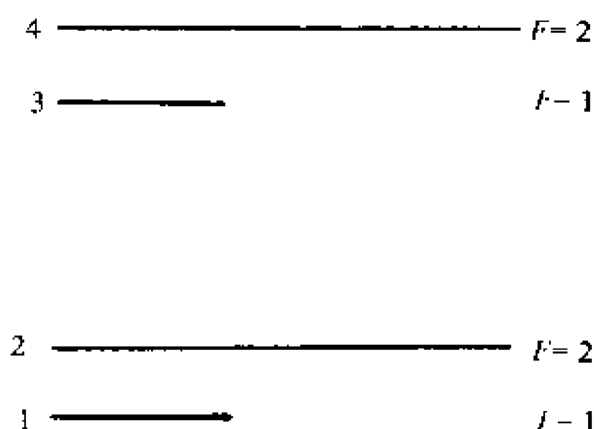


图 3.11

与前面建立转移方程的作法类似,假定 I_ν 局限在小立体角

$\delta\Omega$ 中，沿辐射方向作一小柱体，具有单位底面积，且与射线垂直，其高为 δx. 当辐射穿过小柱体时，将受到小柱体中分子的吸收. 现将上能级 4 记做 i，下能级 1 记为 j 以便适应普遍性，则柱内 OH 分子对辐射的吸收当为

$$h\nu\varphi(\nu)B_{ji}I_\nu\frac{\delta\Omega}{4\pi}N_j\delta\nu\delta x.$$

式中 B_{ji} 是爱因斯坦感应吸收系数（从下能级 $j\rightarrow$ 上能级 i），N_j—— 下脉泽能级的分子数，$d\Omega$—— 沿传播方向的辐射束所张立体角，$\varphi(\nu)$ —— 归一化的谱线形状因子，

$$\int_0^\infty \varphi(\nu)d\nu = 1$$

［见(3.37)式］.

类似地，小柱体中分子的感应（或称受激）发射为

$$h\nu\varphi(\nu)B_{ij}I_\nu\frac{\delta\Omega}{4\pi}N_i\delta\nu\delta x.$$

感应吸收和感应发射都与原来入射束局限于相同之 $\delta\Omega$ 中.

此外，柱体中分子还各向同性地产生不相干的自发发射. 其中，沿入射束方向的立体角 $\delta\Omega$ 中的自发发射为

$$h\nu\varphi(\nu)A_{ij}\frac{\delta\Omega}{4\pi}N_i\delta\nu\delta x.$$

对于稳定情况，在传播距离 δx 上，辐射能量的变化是

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial x}\delta\nu\delta x\delta\Omega.$$

它应当等于上述三项之和，即

$$h\nu\frac{\delta\Omega}{4\pi}\delta x I_\nu(B_{ij}N_i - B_{ji}N_j)\varphi(\nu)\delta\nu + h\nu\frac{\delta\Omega}{4\pi}\delta x A_{ij}N_i\varphi(\nu)\delta\nu,$$

故有

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial x}\delta\nu = h\nu\frac{I_\nu}{4\pi}(B_{ij}N_i - B_{ji}N_j)\varphi(\nu)\delta\nu + \frac{h\nu}{4\pi}A_{ij}N_i\varphi(\nu)\delta\nu.$$

两边对 ν 积分，并注意谱线等值宽度 $\Delta\nu$ 是

$$\Delta\nu \equiv \frac{\int I_\nu \delta\nu}{\bar{I}_\nu} = \frac{\int I_\nu \delta\nu}{\int I_\nu \varphi(\nu)\delta\nu},$$

故得

$$\frac{\partial \bar{I}_\nu}{\partial x} = (\beta_{ji} N_i - \beta_{ji} N_j)\bar{I}_\nu + \alpha_{ji} N_i.$$

其中

$$\beta_{ij} \equiv \frac{h\nu B_{ij}}{4\pi\Delta\nu}, \quad \beta_{ji} \equiv \frac{h\nu B_{ji}}{4\pi\Delta\nu}, \quad \alpha_{ij} \equiv \frac{h\nu A_{ij}}{4\pi\Delta\nu}.$$

将 $\bar{I}_\nu$ 简记为 I，并注意 $\beta_{ji} = \frac{g_i}{g_j}\beta_{ij}$，

得到

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \beta_{ij}\left(N_i - \frac{g_i}{g_j}N_j\right)I + \alpha_{ij}N_i, \tag{3.167}$$

或者

$$\frac{\partial I}{\partial x} = g_i\beta_{ij}\left(\frac{N_i}{g_i} - \frac{N_j}{g_j}\right)I + \alpha_{ij}N_i. \tag{3.168}$$

把上下能级粒子数差记为 δN，

$$\delta N \equiv \frac{N_i}{g_i} - \frac{N_j}{g_j},$$

则有

$$\frac{\partial I}{\partial x} = g_i\beta_{ij}\delta N I + \alpha_{ij}N_i, \tag{3.169}$$

或者简单记为

$$\frac{\partial I}{\partial x} = K_\beta I + K_\alpha. \tag{3.170}$$

式中 $K_\beta \equiv g_i\beta_{ij}\delta N$，$K_\alpha \equiv \alpha_{ij}N_i$.

(3.170)式即为分子脉泽源中的辐射转移方程. 与普通介质中的转移方程 $\frac{\partial I_\nu}{\partial x} = -k_\nu I_\nu + j_\nu$ 相比较，可以看出(3.170)式中的 K_α 是激活介质的谱线发射系数，而 $K_\beta I$ 项则对应于通常的吸收项 $-k_\nu I_\nu$. 所不同的是，由于粒子数反转，$\delta N > 0$(例如，图 3.8 所示的

能级 4,1 之间的粒子数反转),故得 $K_\beta I>0$. 这样,$K_\beta I$ 应理解为“负的吸收”项——实际上代表介质的辐射放大作用.

在辐射场不十分强情况下,可以近似地认为反转 δN 和强度 I 无关,δN 视为常数. 用激光物理的术语说,这是不饱和脉泽. 因此,(3.170)式的解为(假定 $x=0$ 处的初始强度 $I_0=0$),

$$I=\frac{K_\alpha}{K_\beta}\exp[K_\beta x]-\frac{K_\alpha}{K_\beta}=\frac{K_\alpha}{K_\beta}[\exp(K_\beta x)-1]. \tag{3.171}$$

注意,$K_\beta>0$,故(3.171)式中的指数因子 $\exp(K_\beta x)$ 表明存在脉泽作用,即在图 3.11 所示的反转分布下,1720MHz 线的强度随距离 x 作指数增大. $K_\beta x=G$ 称为放大增益.

参 考 文 献

[1] Bekefi,G. ,Radiation Proeesses in Plasmas,Wiley,New York,1966.

[2] Chandrasekhar,S. ,Radiative Transfer,Dover,New York,1960.

[3] J. F. Chen and J. H. You,*Journal of Physics A*,Math. Gen **27**,2905,(1994).

[4] Cook,A. H. ,Celestial Masers,Cambridge University Press,1977.

[5] Ginzburg,V. and Syrovatskii,S. ,*Ann. Rev. Astro. AP.* ,**7**(1969),375.

[6] Hummer. D. and Rybieki,G. ,*Ann. Rev. Astro. Ap.* ,**9**(1970),237

[7] Jeffries,J. ,Spectral Line Formation,Waltham. Mass. ,Blaisdell,1968.

[8] Litvak,M. ,*Ann. Rev. Astro. Ap.* ,**12**(1974),97.

[9] Haar,D. and Pelling,M. A. ,*Rep. Prog. Phys.* ,**37**(1974)

[10] Rybicki,G. B. ,Lightman,A. P. ,Radiative Process in Astrophysics,Freeman, San Franeisco,1982.

[11] Frank,H. Shu,The Physics of Astrophysics,Volume I:Radiation,University Science Books,Mill Valley,California,1992.

[12] Tucker,W. ,Radiation Processes in Astrophysics,MIT Press,Cambridge, Mass. ,1976.

[13] Unno,W. ,*Publi. Astro. Soc. Japan*,**8**,108,1956.

第四章　回旋辐射，同步辐射及曲率辐射

磁场中的电子受洛伦兹力作用作加速运动，从而将产生辐射．通常把非相对论电子在磁场中的辐射叫做回旋辐射，而把极端相对论电子的这种辐射称为同步辐射（这是由于这种辐射首先在同步加速器中得到检测证实．而在前苏联文献中常称为磁轫致辐射）．非相对论电子和极端相对论电子在磁场中的运动类似，都是沿圆周或螺旋线运动，其角频率是 $\omega_0=\frac{eB}{mc}$，只是在相对论电子情况下，由于质量的相对论变化（$m=\gamma m_0$，γ 是洛伦兹因子），使得在给定磁场中转动频率 ω_0 有所下降而已．但两种的辐射却有明显不同的特征，这在第一章的一般讨论中已经说明．从非相对论电子过渡到相对论电子，辐射总功率由小变大；角分布从近似各向同性变到明显方向性；谱的特点则是从单色线谱变到光滑连续谱，且辐射频率明显增高（对于给定的磁场而言）．

为什么非相对论电子的回旋加速辐射的特点是具有近似各向同性及单色性？为什么同步辐射具有连续谱，且其峰值频率（即对应于最强辐射的频率）大大高于相同场强 B 下的回旋辐射频率？首先对这些问题作定性的物理说明是有益的．

关于回旋辐射．在此先回忆一下经典电磁学中的偶极辐射，图 4.1(a)表示一个沿铅直方向（选为 z 轴）上振动的电偶极子及其辐射角分布，沿偶极子方向辐射最小，而沿 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 方向上辐射最强（见第一章）．图 4.1(b)给出偶极辐射在空间任一点 $\boldsymbol{r}$ 的场强方向．电矢 $\boldsymbol{E}$ 沿这一点的“经线”方向（即 $\boldsymbol{E}=E_\theta\boldsymbol{e}_\theta$），磁矢 $\boldsymbol{B}$ 沿“纬线”方向（即 $\boldsymbol{B}=B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$）．能流 $\boldsymbol{S}$ 则沿位矢 $\boldsymbol{r}$ 方向指向外（$\boldsymbol{S}=S\boldsymbol{e}_r$）．$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 三者构成右手螺旋关系．如果偶极子以单色频率 ω_0 振动，即

$$\boldsymbol{d}=er_0\cos\omega_0t\boldsymbol{k}=d_0\cos\omega_0t\boldsymbol{k}$$

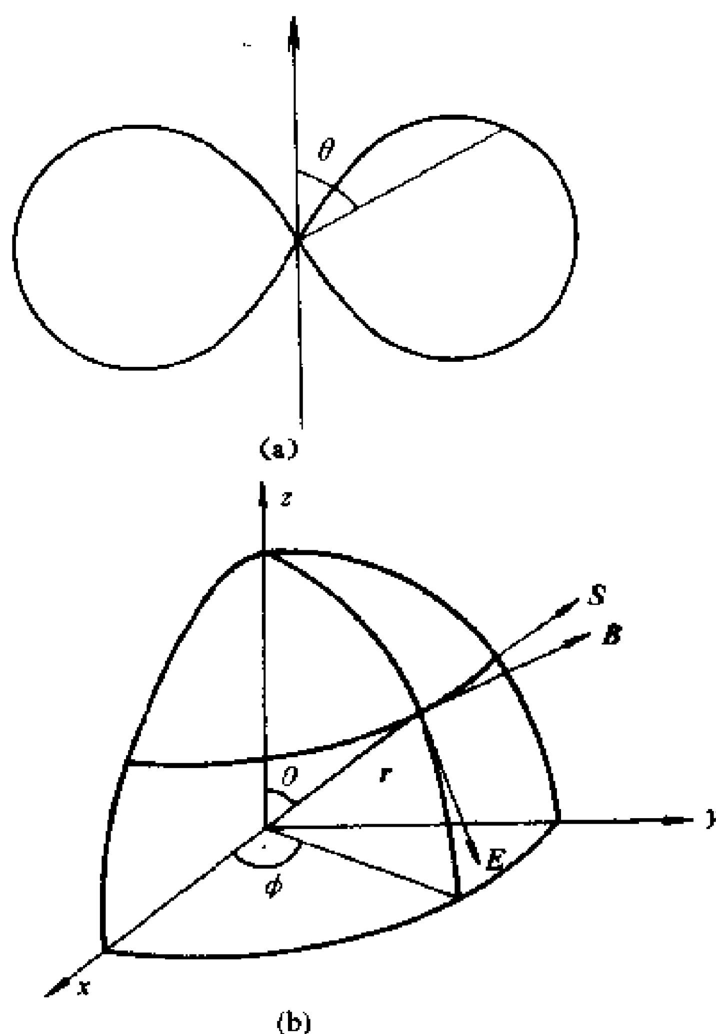


图 4.1

($\boldsymbol{k}$ 为 z 方向单位矢)，则空间任一点(r,θ,φ)处的场强是

$$E_\theta = B_\varphi = -\frac{\omega_0^2 d_0 \sin\theta}{c^2}\frac{\cos(\omega_0 t - kr)}{r},$$

它表示一个以偶极子为中心向外传播的单色球面波，即单色振动偶极子的辐射是单色辐射.

电子的回旋辐射和偶极辐射有着本质的联系. 如果将电子在磁场中的圆周运动(见图 4.2，角频率记为 ω_L，z 轴垂直于圆轨道平面)写成

$$x = r_0 \cos\omega_L t,$$

$$y = r_0 \sin\omega_L t = r_0 \cos\left(\omega_L t - \frac{\pi}{2}\right),$$

则表示圆周运动是两个方向彼此垂直的，频率相同的简谐振动的合成，两者的相位差是 $\pi/2$. 只要速度 $v \ll c$，就可以将这两个简谐振动看成电偶极子的单色振动，即电子的低速圆周运动实际上可看成一个二维的电偶极子. 这样就不难由偶极辐射特征来说明回旋辐射.

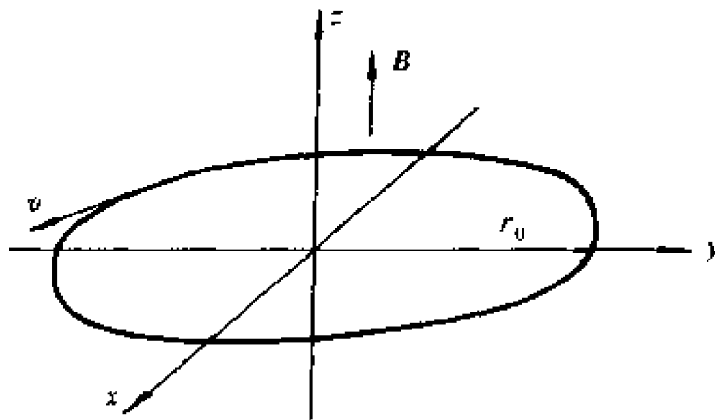


图 4.2

关于回旋辐射的角分布. 从图 4.1(a)不难想象，一个二维偶极子辐射大体上是各向同性的（最强辐射方向的强度仅为最弱辐射方向的两倍）. 这是因为二维偶极子的 x 分量和 y 分量在任一给定方向上的辐射总是大体上互相补充的. 例如，x 方向的偶极子沿 x 轴本身方向的辐射虽然是零，但 y 分量偶极子沿该方向的辐射却达到极大. 对照图 4.2 还可看出，沿 z 轴方向（$\boldsymbol{B}$ 方向）的辐射最强，达到沿(x,y)平面上任一方向辐射强度的两倍（沿其它方向辐射则取中间值），这是由于二维偶极子的 x 分量和 y 分量沿 z 轴方向的辐射同时达到极大的缘故；沿(x,y)平面上任一方向，例如 x 轴方向（这不失一般性，因为 x,y 轴本来就是在 x,y 平面上随意选取的）的辐射尽管 y 分量偶极子达到极大，但 x 分量却毫无贡献，故强度差两倍. 这和严格计算的结果是完全一致的.

关于回旋辐射之所以是单色的，那是因为作单色振动的偶极

子的辐射是单色辐射的缘故. 二维偶极子的 x 分量和 y 分量具有相同的振动频率 ω_L，因此回旋辐射是单色的，其辐射频率就是电子作圆周运动的角频率 ω_L.

同样还可以说明回旋辐射的偏振状态. 从线偶极子辐射场的偏振方向(图 4.1(b)不难想象二维偶极子的情况：沿 z 轴方向的辐射应当是圆偏振的（因为偶极子的 x 分量和 y 分量在 z 轴上任一点产生的场强 $\boldsymbol{E}_x$ 和 $\boldsymbol{E}_y$ 是彼此垂直的，振幅相同而相位相差 $\frac{\pi}{2}$）. 沿(x,y)平面上任一方向，例如 x 轴方向(不失一般性)，辐射则是线偏振的(因为 x 分量偶极子沿 x 轴无辐射，而 y 分量沿 x 轴的辐射是线偏振的，偏振方向平行于 y 轴). 至于沿其它方向(既非 z 轴，又不是(x,y)平面上任一方向)，不难想像辐射应是椭圆偏振的.

注意，以上讨论的前提条件是 $v \ll c$. 当圆周运动速度 v 较大时，尽管仍可分解为两个互相垂直的简谐振动，但每个却不能看作偶极子了. 这时辐射将出现一些偶极辐射所不能解释的新特征：随着 v 值增大(因面"能量"γ 值增大)，角分布各向异性逐渐明显，单色性将被破坏，除了以基频

$$\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L$$

为主的辐射外(注意现在基频 ω_0 已不是频率 ω_L，$\omega_0 \neq \omega_L$)，还有 $2\omega_0$，$3\omega_0$…等较弱的谐频成分. 当 $v \simeq c$ 时，成为相对论电子，分立线谱将过渡成光滑的连续谱.

对于相对论电子的同步辐射，也可以作定性的物理说明. 第一章讨论角分布时已指出，当电子速度 $v \lesssim c$ 时，辐射具有明显的各向异性，其原因是：由于多普勒效应，使得沿着电子速度方向的辐射最强，几乎全部辐射集中在以 v 为中心线的、半张角为 $\theta \sim \frac{1}{\gamma}$ 的狭窄角锥之中(γ 为洛伦兹因子). 图 4.3 示出在磁场中做圆周运动的相对论电子的辐射角分布图样.

至于同步辐射为什么不再保持单色性，面是一个连续谱，这一

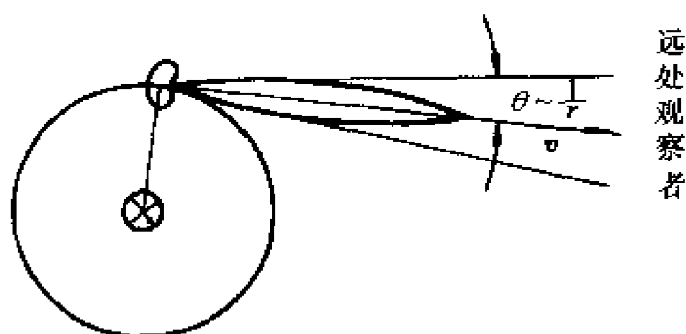


图 4.3

点实际上和上面介绍的辐射方向性有关. 以圆周运动电子的同步辐射为例,这时只有处在圆轨道平面上(或其附近)的观察者才能收到辐射,而且只能在观察者处在辐射角锥之内时才可收到. 因此,收到的辐射必然是周期性脉冲,如图 4.4 所示. 这一周期性脉冲显然不再是单色波,脉冲频率 ν_0 就是电子沿轨道的转动频率,对于相对论电子,该频率为

$$\nu_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{eB}{\gamma m_0c}=\frac{\omega_L}{2\pi}\frac{1}{\gamma},$$

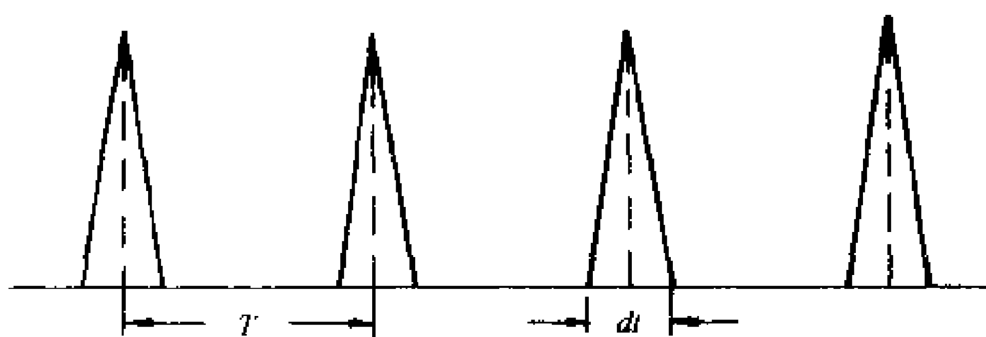


图 4.4

式中 $\omega_L=\frac{eB}{m_0c}$ 是非相对论电子在磁场中的转动频率. 由此可见,"能量"为 γ 的电子的转动频率 ω_0 比非相对论电子($\gamma\sim1$)的 ω_L 减小到 γ 倍,这是由于其质量 m 比静质量 m_0 增大到 γ 倍之故. 脉冲周期 $T=\frac{1}{\nu_0}$,按傅氏分析理论,当这一脉冲展成级数时,基频就是脉冲频率 ν_0.

若要知道图 4.4 的周期脉冲中的主要频率成分(即哪些频率成分幅值最大),那就还需知道每个脉冲的持续时间 dt 的大小,若要求得 dt,那么必须注意到这样一个问题,即观察者收到的每个脉冲的持续时间 dt 并不等于电子发射这个脉冲所需的时间 dt',$dt\neq dt'$.

设观察者在 $t—t+dt$ 时间中收到一个脉冲信号,它是远处电子在 $t'-t'+dt'$ 这一较早的时间中发射的. 由图 4.3 可见,发射时间 dt' 应为

$$dt'=\frac{2\theta}{\omega_0}=\frac{2}{\gamma\omega_0},$$

即 dt' 就是电子沿圆轨道扫过 2θ 角所需时间,θ 是辐射角锥的半张角.

注意,这一脉冲的空间长度不等于 cdt';其原因是:在 dt' 中,电子本身也向观察者方向前进了 vdt',所以这个脉冲的长度应被挤缩成为 $(c-v)dt'$,如图 4.5 所示,而观察者在 dt 时间里收到的脉冲的长度 cdt 应在传播过程中不变,等于初始的脉冲长度,即

$$cdt=(c-v)dt',$$



图 4.5

故

$$dt = \left(1-\frac{v}{c}\right)dt' = \frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}{1+\frac{v}{c}}dt' \simeq \frac{1}{2\gamma^2}dt'.$$

代入 dt' 值，得到

$$dt \simeq \frac{1}{\gamma^3}\frac{1}{\omega_J} = \frac{1}{\gamma^2\omega_L},$$

式中 $\omega_L = \dfrac{eB}{m_0c}$.

按熟知的傅氏分析理论可知，图 4.4 所示的周期性脉冲不再是单色波，而是含有从基频 $\omega_0\left(\omega_0=\dfrac{1}{\gamma}\omega_L\right)$ 到各次谐波（$2\omega_0$，$3\omega_0$，$4\omega_0\cdots$）的合成波，出现了一个谱分布，并且其中振幅最大的谐波频率为

$$\omega_m \simeq \frac{1}{dt} \simeq \gamma^2\omega_L$$

（作为例子，读者不妨对一个周期为 T，持续时间为 τ 的周期性矩形脉冲展开成傅氏级数，并求 ω_m）.

由此可见，周期性脉冲中包含了从 $\omega_0=\dfrac{1}{\gamma}\omega_L$ 直到$\sim\gamma^2\omega_L$ 的各种频率成分，而辐射的峰值频率为 $\omega_m\simeq\gamma^2\omega_L$，这样就得到了非单色性的物理说明：非单色性来源于辐射的方向性. 此外，这一定性说明还给出了峰值频率值 ω_m. 由于相对论电子 $\gamma\gg1$，故频率 ω_m 大大高于回旋辐射频率 ω_L. 有趣的是，频率为 ω_m 的单色波的振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega_m} \sim dt,$$

亦即在辐射角锥扫过观察者的时间 dt 中，恰好是那个在这一持续时间中完成一个周期振动的单色波为最强的辐射波，凡周期和 dt 相差甚多的单色波都很弱.

初看起来，相对论电子的辐射谱似乎是一系列的线状分立谱，频率为 $\omega_0=\dfrac{1}{\gamma}\omega_L$，$2\omega_0$，$3\omega_0\cdots$，谱线间隔为 ω_0. 但实际上，由于最强

辐射的频率集中于 ω_m 及其近旁，而 $\omega_m \gg \omega_0$（峰值频率 $\omega_m = \gamma^2 \omega_L$ 比基频 $\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L$ 大 γ^3 倍，对于 $\gamma = 10^3$，则 $\omega_m = 10^9 \omega_0$），因此谱的分立性已不明显，从而可以认为辐射具有光滑连续谱.

下面对回旋辐射和同步辐射分别作进一步的定量讨论.

§4.1 回旋加速辐射

在天体物理中，与同步辐射机制相比，非相对论电子的回旋辐射重要性较小，这是由于在一般天体中磁场通常是很弱的；例如，在 10^{-3}—10^{-6}Gs 之间，辐射频率 $\omega_L = \frac{eB}{m_0 c}$ 很低，远小于通常所指的射电频率. 另一个原因是，非相对论电子的辐射功率小. 但在某些具有强磁场的天体中，回旋辐射就成了不可忽视的重要机制. 例如，在说明太阳耀斑、白矮星的光学辐射、以及中子星的 X 射线发射线时都是如此.

4.1.1 电子运动方程，拉摩频率

在讨论回旋辐射之前，有必要先来说明辐射电子本身在磁场中的运动. 前面第一章已经指出，辐射的各种性质（例如谱分布）取决于电子的运动. 在均匀磁场中，电子受洛伦兹力作用，运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \boldsymbol{v}) = \frac{-e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \qquad (4.1)$$

在非相对论情况下，特别是当电子处于极低速的极限情况下，$\gamma \simeq 1$，方程可以简化为

$$m_0 \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{-e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \qquad (4.2)$$

由于力垂直于速度，$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = 0$，故粒子能量 $\frac{1}{2}m_0 v^2$（因而 $|\boldsymbol{v}|$）守恒. 此外，由于加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 始终垂直于 $\boldsymbol{B}$，因此速度 $\boldsymbol{v}$ 平行于 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $v_{/\!/}$ 始终不变. 从而粒子进入磁场时的投射角 α（$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之夹角）

也是守恒的，因为 $\cos\alpha=\frac{v_{/\!/}}{v}$.

解(4.2)式，可得粒子的轨道方程. 取 $\boldsymbol{B}$ 方向为 z 轴，即 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$，则(4.2)式的分量表达式为

$$\ddot{x}=-\omega_L\dot{y},\quad \ddot{y}=\omega_L\dot{x},\quad \ddot{z}=0. \qquad (4.2')$$

式中 $\omega_L=\frac{eB}{m_0c}$，前两式对时间再求一次导数，可分开变数，得到

$$\dddot{x}+\omega_L^2\dot{x}=0,\quad \dddot{y}+\omega_L^2\dot{y}=0.$$

其解为

$$\dot{x}=v_\perp\cos(\omega_Lt+\delta),$$
$$\dot{y}=v_\perp\sin(\omega_Lt+\delta),$$
$$\dot{z}=v_{/\!/}=\text{const.},$$

式中 $v_{/\!/}$、$v_\perp$，δ 为积分常数，$v_{/\!/}$，$v_\perp$ 的意义分别是速度平行于及垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的分量. 再积分一次，得到运动方程

$$x=\frac{v_\perp}{\omega_L}\sin(\omega_Lt+\delta)+x_0,$$
$$y=\frac{-v_\perp}{\omega_L}\cos(\omega_Lt+\delta)+y_0, \qquad (4.3)$$
$$z=v_{/\!/}t+z_0,$$

式中 x_0，y_0，z_0，δ 都由初始条件定.

方程(4.3)表示，磁场中电子沿着轴平行于 B 的螺旋线运动，轨道在 (x,y) 平面上的投影是一个圆. 圆心在点 (x_0,y_0) 处，其半径为 $r_L=\frac{v_\perp}{\omega_L}$，$r_L$ 称为拉摩半径. 粒子的回转频率是 $\omega_L=\frac{eB}{m_0c}$，ω_L 称为拉摩频率；注意，它和场强 $\boldsymbol{B}$ 成正比，但与速度无关. 描写圆心轨迹的点 $(x_0,y_0,v_{/\!/}t+z_0)$ 称为引导中心.

可以对给定磁场中拉摩频率 ω_L 的数量级作一估计. 由于 $m_0=9.1\times10^{-28}$g，$c=3\times10^{10}$cm/s，$e=4.8\times10^{-10}$e.s.u.，

$$\omega_L=1.8\times10^7B/\text{s}.$$

所以在 10^2Gs 磁场中，$\omega_L\simeq10^9$/s；在 $B\sim1$Gs 时，$\omega_L\simeq10^7$/s；在 B

$\sim 10^{-3}$Gs 场中，$\omega_L \simeq 10^4/\text{s}$；$B \sim 10^{-5}$Gs，$\omega_L \sim 10^2/\text{s}$. 可见，弱磁场中回旋频率远小于射电辐射频率($\gtrsim 10^7/\text{s}$).

以上由(4.1)式引出(4.3)时，假定了 $\gamma \simeq 1$，即(4.3)式是一近似结果，只适用于 $v \ll c$ 的极低速电子. 实际上，非相对论电子 γ 不一定非常接近于 1. 在讨论电子回旋辐射问题时，将不局限于 $\gamma \to 1$ 的极限情况. 如果不做 $\gamma \to 1$ 的近似，准确结果仍与(4.3)式非常类似，只是电子回旋频率有所变动，改为 $\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L$，不再是拉摩频率. 这一推导在 § 2.1 给出，这里只列出结果：

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{v_\perp}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \delta) + x_0, \\
y &= -\frac{v_\perp}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \delta) + y_0, \qquad (4.3') \\
z &= v_{/\!/} t + z_0,
\end{aligned}
$$

式中 $\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L$. 只要电子"能量"$\gamma$ 不十分大，$\gamma \gtrsim 1$，都称为非相对论电子.

4.1.2 回旋辐射的总功率

由于是非相对论电子的辐射，因此总功率公式由第一章(1.19)式给出，即

$$P = \frac{2e^2\dot{v}^2}{3c^3}.$$

但在讨论电子在磁场中的辐射时，实际提出的问题常常是：对于给定的磁场 $\boldsymbol{B}$，一个速度为 $\boldsymbol{v}$ 的电子的总功率将是多少？即希望用 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{v}$ 而不是用加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 来表示功率 P. 为此，需要改写(1.19)式. 对非相对论电子，$\gamma \simeq 1$，因此有

$$m_0 \dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{e}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).$$

代入(1.19)式，经简化可得

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^4}{m_0^2 c^5} v^2 B^2 \sin^2\alpha,$$

其中 α 是投射角，即v与 B 之夹角. 由于电子经典半径为

$$r_0 = \frac{e^2}{m_0c^2},$$

所以

$$P = \frac{2}{3c}r_0^2v^2B^2\sin^2\alpha, \tag{4.4}$$

或者

$$P = \frac{2r_0^2c}{3}\beta^2B^2\sin^2\alpha. \tag{4.4'}$$

代入电子经典半径值 $r_0=2.82\times10^{-13}$cm，以及光速值 $c=3\times10^{10}$ cm/s，则

$$P = 1.6\times10^{-15}\beta^2B^2\sin^2\alpha\ (\mathrm{erg/s}). \tag{4.5}$$

假定电子速度分布是各向同性的，则平均总功率为

$$\bar{P} = \frac{4}{9}r_0^2c\beta^2B^2 = 1.1\times10^{-15}\beta^2B^2(\mathrm{erg/s}) \tag{4.6}$$

由(4.5)和(4.6)可见，非相对论电子回旋辐射功率与其能量成正比(即正比于 β^2)，且与磁场强度平方 B^2 成正比.

4.1.3 回旋辐射的谱

第一节已经指出，即使对非相对论电子，它在磁场中的辐射也不是严格单色的. 当电子速度较大时，谐频成分的辐射将增强.

为了简单起见，先考虑沿圆轨道运动的电子(即$v_{/\!/}=0$)的回旋辐射谱. 按照准确解(4.3′)式，当坐标原点选在圆心，轨道平面选为(x,y)平面时(见图 4.6)，电子的位置和速度分别为

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \frac{c\beta}{\omega_0}\sin\omega_0t\boldsymbol{i} - \frac{c\beta}{\omega_0}\cos\omega_0t\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \beta\cos\omega_0t\boldsymbol{i} + \beta\sin\omega_0t\boldsymbol{j},$$

其中

$$\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L = \frac{1}{\gamma}\frac{eB}{m_0c}.$$

把 $\boldsymbol{\rho}(t)$，$\boldsymbol{\beta}(t)$代入到周期运动的谱公式(1.35)式，即

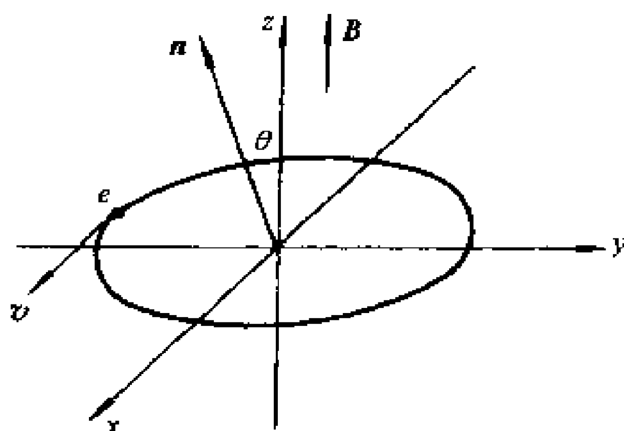


图 4.6

$$\overline{\frac{dP_s}{d\Omega}} = \frac{1}{T}\frac{dW_s}{d\Omega} = \frac{e^2S^2\omega_0^4}{8\pi^3 c}\left|\int_0^T \exp\left\{iS\omega_0\left(t - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}}{c}\right)\right\}\right.$$

$$\left.\cdot[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})]dt\right|^2,$$

$$S = 1,2,3\cdots,$$

即可求出谱功率$\overline{\frac{dP_s}{d\Omega}}$. 为了使辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 有最简单的表示，不妨这样选择坐标轴，即使观察者在 oxz 平面内(图 4.6)，这样显然不失其一般性. 从而有

$$\boldsymbol{n} = \sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{k},$$

故有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho} = \frac{c\beta}{\omega_0}\sin\theta\sin\omega_0 t,$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{i}(-\beta\cos^2\theta\cos\omega_0 t)$$

$$+\boldsymbol{j}(-\beta\sin\omega_0 t)$$

$$+\boldsymbol{k}(\beta\sin\theta\cos\theta\cos\omega_0 t),$$

故(1.35)式中的积分可表示为

$$\int_0^T \exp\left\{iS\omega_0\left(t - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}}{c}\right)\right\}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})]dt$$

$$= \boldsymbol{i}\int_0^T \exp\{iS(\omega_0 t - \beta\sin\theta\sin\omega_0 t)\}[-\beta\cos^2\theta\cos\omega_0 t]dt$$

$$+\boldsymbol{j}\int_0^T \exp\{iS(\omega_0 t - \beta\sin\theta\sin\omega_0 t)\}[-\beta\sin\omega_0 t]dt$$

$$+ \boldsymbol{k}\int_0^T \exp\{iS(\omega_0 t - \beta\sin\theta\sin\omega_0 t)\}$$

$$\cdot [\beta\sin\theta\cos\theta\cos\omega_0 t]dt$$

$$= \boldsymbol{i}\left[\frac{-\beta\cos^2\theta}{\omega_0}\right]\int_0^{2\pi}\cos u\, \exp\{iS(u - \beta\sin\theta\sin u)\}du$$

$$+ \boldsymbol{j}\left[\frac{-\beta}{\omega_0}\right]\int_0^{2\pi}\sin u\, \exp\{iS(u - \beta\sin\theta\sin u)\}du$$

$$+ \boldsymbol{k}\left[\frac{\beta\sin\theta\cos\theta}{\omega_0}\right]\int_0^{2\pi}\cos u\, \exp\{iS(u - \beta\sin\theta\sin u)\}du.$$

式中含 $\cos u$ 和 $\sin u$ 的两个积分分别和贝塞尔函数及其导数联系着.现已知道,贝塞尔函数的积分表示式为

$$J_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iSu - ix\sin u}du,$$

因而

$$J'_s(x) = \frac{-i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin u e^{iSu - ix\sin u}du.$$

利用 $J_s(x)$ 及 $J'_s(x)$ 的积分表示,很容易简化前面含有 $\cos u$ 和 $\sin u$ 的两个积分值,因为

$$\int \cos u e^{iS(u - \beta\sin\theta\sin u)}du$$

$$= \int e^{iSu - iS\beta\sin\theta\sin u}d\sin u$$

$$= \frac{1}{-S\beta\sin\theta}\int e^{iSu - iS\beta\sin\theta\sin u}d(-S\beta\sin\theta\sin u + Su - Su)$$

$$= \frac{1}{-S\beta\sin\theta}\int e^{i(Su - S\beta\sin\theta\sin u)}d(Su - S\beta\sin\theta\sin u)$$

$$+ \frac{1}{\beta\sin\theta}\int e^{iSu - iS\beta\sin\theta\sin u}du$$

$$= \frac{i}{S\beta\sin\theta}e^{i(Su - S\beta\sin\theta\sin u)} + \frac{1}{\beta\sin\theta}\int e^{iSu - iS\beta\sin\theta\sin u}du,$$

从而定积分值为

$$\int_0^{2\pi}\cos u e^{iS(u - \beta\sin\theta\sin u)}du$$

$$=\frac{i}{S\beta\sin\theta}e^{i(Su-S\beta\sin\theta\sin u)}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{\beta\sin\theta}$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}e^{iSu-iS\beta\sin\theta\sin u}du$$

$$=\frac{2\pi}{\beta\sin\theta}J_s(S\beta\sin\theta),$$

而

$$\int_0^{2\pi}\sin u e^{iS(u-\beta\sin\theta\sin u)}du = 2\pi i J_s'(S\beta\sin\theta).$$

把这两个结果合写在下面，有

$$\int_0^{2\pi}\cos u e^{iS(u-\beta\sin\theta\sin u)}du = \frac{2\pi}{\beta\sin\theta}J_s(S\beta\sin\theta),$$

$$\int_0^{2\pi}\sin u e^{iS(u-\beta\sin\theta\sin u)}du = 2\pi i J_s'(S\beta\sin\theta). \tag{4.7}$$

式中 $J_s(x)$ 代表正整数 S 阶贝塞尔函数，$J'_s(x)$ 则代表 $J_s(x)$ 对其宗量的导数[参见朗道著，《场论》(中译本)，p. 222].

由此可算出

$$\int_0^T\exp\left\{iS_{\omega_0}\left(t-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}}{c}\right)\right\}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})]dt$$

$$=\boldsymbol{i}\left[-\frac{1}{\nu_0}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right]J_s(S\beta\sin\theta)+\boldsymbol{j}\left[\frac{-i\beta}{\nu_0}\right]J_s'(S\beta\sin\theta)$$

$$+\boldsymbol{k}\left[\frac{1}{\nu_0}\cos\theta\right]J_s(S\beta\sin\theta), \tag{4.8}$$

式中

$$\nu_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{\gamma}\frac{\omega_L}{2\pi}=\frac{1}{\gamma}\nu_L.$$

注意，积分模值平方为该积分与其复共轭的乘积，故得

$$\overline{\frac{dP_s}{d\Omega}}=\frac{1}{T}\frac{dW_s}{d\Omega}=\frac{2\pi e^2S^2\nu_0^2}{c}$$

$$\cdot[\cot^2\theta J_s^2(S\beta\sin\theta)+\beta^2J_s'^2(S\beta\sin\theta)],$$

$$S=1,2,3,\cdots. \tag{4.9}$$

(4.9)式给出沿 θ 方向单位立体角，频率为 $S\nu_0=\frac{1}{\gamma}S\nu_L$ 的单

色波辐射功率($S=1,2,3,\cdots$).如果利用贝塞尔函数理论中的一系列恒等式,则可对(4.9)式完成沿全部立体角的积分,现只写出结果如下[对详细推导感兴趣的读者可参见伊凡宁科、索柯洛夫著,《经典场论》(中译本)]:

$$P_s=\left(\frac{8\pi^2e^2\nu_L^2\gamma^{-2}}{v}\right)\left\{S\beta^2J'_{2s}(2S\beta)-S^2\gamma^{-2}\int_0^\beta J_{2s}(2Su)du\right\}. \tag{4.10}$$

(4.10)给出频率为 $S\nu_0=\frac{1}{\gamma}S\nu_L$ 的单色辐射功率($S=1,2,3,\cdots$),此即回旋辐射谱公式.

(4.10)式还可以进一步简化.由于现在讨论的是非相对论电子,$\beta\ll1$,$S\beta\ll1$.因此可将贝塞尔函数作级数展开,利用渐近式

$$J_n(z)=\frac{z^n}{2^n\cdot n!}\qquad(z\ll1),$$

则有

$$P_s\simeq\left(\frac{8\pi^2e^2\nu_L^2}{c}\right)\frac{(S+1)(S^{2S+1})}{(2S+1)!}\beta^{2s}. \tag{4.11}$$

由(4.11)可知,辐射谱是由一系列分立谱线组成,频率依次是 ν_0,$2\nu_0$,$3\nu_0\cdots$,而其强度则依次迅速减小(因为 $P_{s+1}/P_s\simeq\beta^2\ll1$),几乎全部能量集中于基频辐射之中.例如,当电子的 $\beta=0.1$ 时,约 90%以上的能量集中于基频辐射之中.图 4.7 是这一强度分布示意图.当电子速度很低时,实际上只有

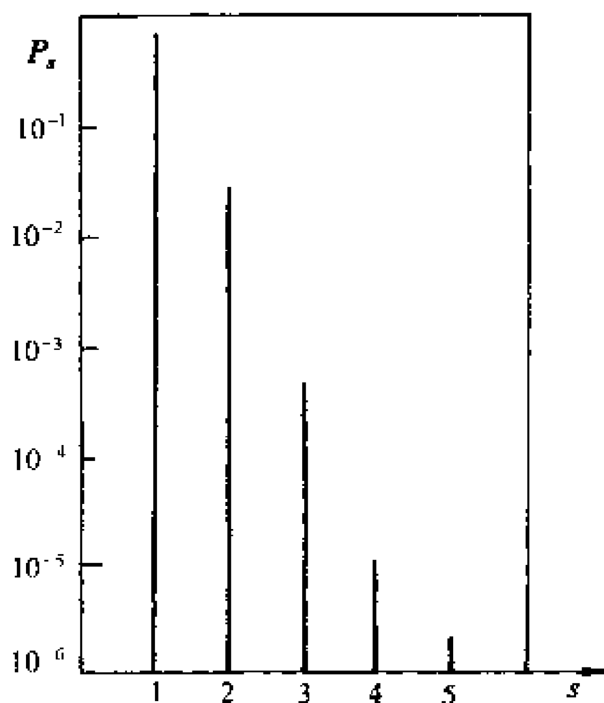
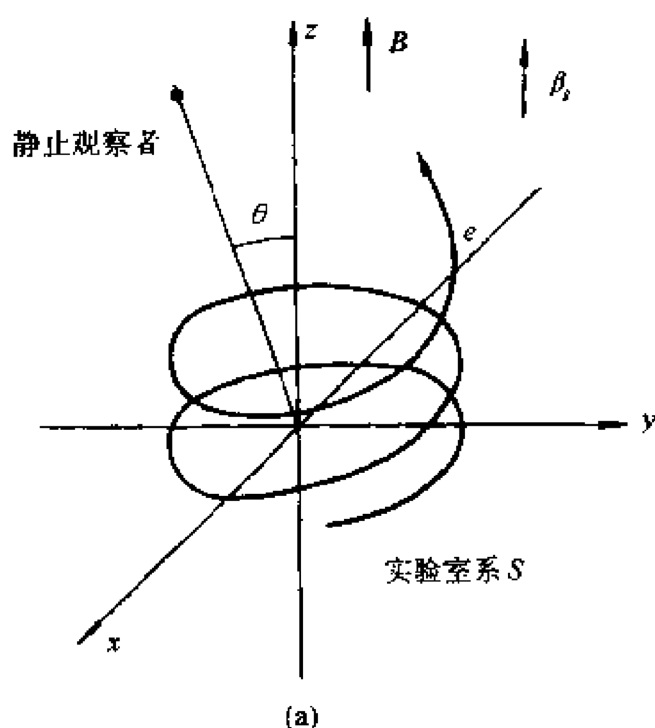
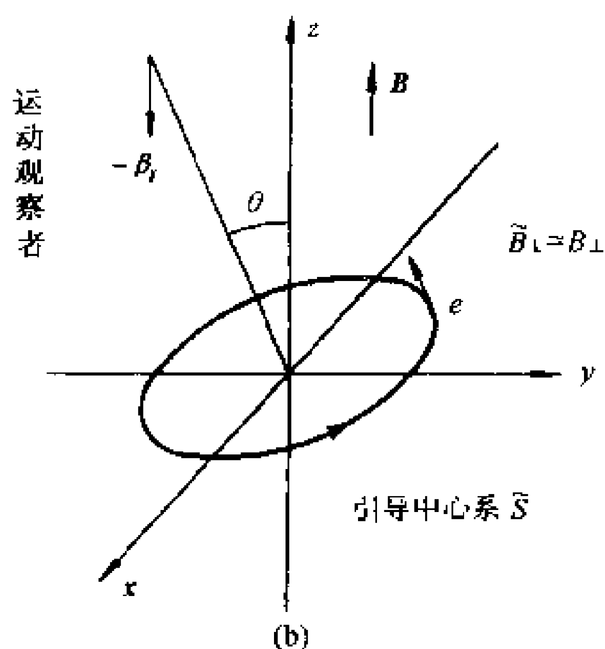


图 4.7



(a)



(b)

图 4.8

基频成分，成为单色辐射.

以上讨论仅限于做圆周运动的电子的回旋辐射，当电子沿磁场方向有运动，即$\beta_{//}\neq 0$，则做螺旋轨道运动. 此时的谱分布可以借助于洛伦兹变换由(4.9)式，(4.10)式得到，即首先可在引导中心参考系$\tilde{S}$中观察电子的辐射，该参考系相对于实验室系S的速度是$\beta_{//}$. 因此在运动系$\tilde{S}$中，电子做圆周运动(其速度记为$\tilde{\beta}_{\perp}$，对于非相对论电子，$\tilde{\beta}_{\perp}\simeq\beta_{\perp}$)，此时谱公式(4.9)和(4.10)显然成立. 然后通过洛伦兹变换回到实验室系即可. 在实验室系S和引导中心系$\tilde{S}$中看到的电子轨道形状和观察者的行为分别是：(a)S系中，静止观察者接收螺旋轨道电子的辐射；(b)$\tilde{S}$系中，电子仍做圆周运动(速度为$\tilde{\beta}_{\perp}\simeq\beta_{\perp}$)，而观察者则沿磁场方向以$-\beta_{//}$运动，如图 4.8(b)所

示. 注意,现在讨论的是非相对论的情况,伽利略变换实际上成为洛伦兹变换的很好的近似,所以在图 4.8(b)中,略去了光行差现象,近似地认为 $\tilde{\theta}\simeq\theta$,即在两个参考系 S 与 $\tilde{S}$ 中,传播方向 θ 相同,并且垂直磁场的速度分量 $\beta_\perp$ 在两个参考系中也近似相等.

螺旋轨道电子的辐射谱特征与圆轨道电子辐射的主要不同点是谱线有移动. 从圆轨道辐射频率 $S\nu_0(S=1,2,3\cdots)$ 变成螺旋轨道的辐射频率 $\frac{S\nu_0}{1-\beta_{/\!/}\cos\theta}$. 由图 4.8(b)可以了解频移的原因——由于远处观察者与辐射电子联线方向上有一速度投影 $\beta_{/\!/}\cos\theta$,从而收到的辐射频率将产生一多普勒移动,成为 $\frac{S\nu_0}{1-\beta_{/\!/}\cos\theta}$.

除了谱线发生频移之外,螺旋轨道电子辐射的 S 次谐波的辐射功率不能用(4.10)式表示,而修改为以下公式:

$$P_s=\frac{8\pi^2e^2\nu_L^2\gamma^{-2}}{v_\perp(1-\beta_{/\!/}^2)^{3/2}}\left[S\beta_\perp^2J'_{2s}\left(\frac{2S\beta_\perp}{\sqrt{1-\beta_{/\!/}^2}}\right)-S^2\gamma^{-2}\cdot\int_0^{\frac{\beta_\perp}{\sqrt{1-\beta_{/\!/}^2}}}J_{2s}(2Su)du\right]. \qquad (4.10')$$

(4.10′)式很容易从(4.10)式根据洛伦兹变换导出. 首先,在引导中心坐标系 $\tilde{S}$ 中计算圆轨道电子的 S 次谐波辐射,这时(4.10)式成立,即

$$\tilde{P}_s=\frac{8\pi e^2\nu_L^2(1-\tilde{\beta}_\perp^2)}{c\tilde{\beta}}\left\{S\tilde{\beta}_\perp^2J'_{2s}(2S\tilde{\beta}_\perp)-S^2(1-\tilde{\beta}_\perp^2)\cdot\int_0^{\tilde{\beta}_\perp}J_{2s}(2Su)du\right\},$$

再从运动参考系 $\tilde{S}$ 回到实验室系 S 时,速度变换式为

$$v_{/\!/}=\frac{\tilde{v}_{/\!/}+v_{/\!/}}{1+\frac{\tilde{v}_{/\!/}\cdot v_{/\!/}}{c^2}},\qquad v_\perp=\frac{\tilde{v}_\perp(1-\beta_{/\!/}^2)^{1/2}}{1+\frac{\tilde{v}_{/\!/}v_{/\!/}}{c^2}},$$

而已知 $\tilde{v}_{/\!/}=0$,故得

$$v_\perp=\tilde{v}_\perp(1-\beta_{/\!/}^2)^{1/2},$$

或者

$$\beta_{\perp} = \tilde{\beta}_{\perp}(1-\beta_{/\!/}^2)^{1/2},$$

把它代入关于 P_s 的公式，就得到(4.10′)式.

4.1.4 回旋辐射的角分布

既然辐射能量集中于基频辐射，因此可以非常精确地用基频辐射的角分布代表整个辐射的角分布，现仍以圆轨道辐射为例，由(4.9)式可知

$$\overline{\frac{dP_1}{d\Omega}} = \frac{2\pi e^2\nu_0^2}{c}\left[\cot^2\theta J_1^2(\beta\sin\theta) + \beta^2 J_1'^2(\beta\sin\theta)\right],$$

注意到

$$J_1(x) \simeq \frac{x}{2}, \quad J'_1(x) \simeq \frac{1}{2} \quad (\text{当 } x \ll 1),$$

故有

$$\overline{\frac{dP_1}{d\Omega}} = \frac{\pi e^2\nu_0^2\beta^2}{2c}(1+\cos^2\theta). \tag{4.12}$$

(4.12)式表明，回旋辐射的角分布大体上是各向同性的，沿着磁场方向 $\boldsymbol{B}$，$\theta=0$，辐射最强；而在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的方向，$\theta=\frac{\pi}{2}$，辐射最弱.两者强度差二倍，这和一开始的定性分析完全一致.

注意，我们求角分布时，没有简单套用第一章中关于非相对论电子的角分布公式(1.14)，即

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2\cdot\dot{v}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta.$$

其原因是，(1.14)式给出的是电子所在点沿某立体角元 $d\Omega$ 方向辐射的功率，而现在关心的是，远离电子的观察者收到的辐射 $\frac{dP(t)}{d\Omega}$ 将具有什么样的角分布问题，自然不能照搬(1.14)式.

4.1.5 回旋辐射的偏振特性

这可以从公式(4.8)的分析中得到. 从谱公式(1.35)的推导中可知，积分式(4.8)是和频率为 $S\nu_0$ 的单色波的振幅值 $\boldsymbol{E}_s$ 有关的，

即

$$\int_0^T \exp\left\{iS_{\omega_0}\left(t-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\rho}}{c}\right)\right\}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})]dt \propto \boldsymbol{E}_s.$$

因此，由(4.8)式可知，基频辐射的振幅值为

$$\boldsymbol{E}_1 \propto \left\{\boldsymbol{i}\left[-\frac{1}{\nu_0}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}J_1(\beta\sin\theta)\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{-i\beta}{\nu_0}J_1'(\beta\sin\theta)\right]\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{k}\left[\frac{\cos\theta}{\nu_0}J_1(\beta\sin\theta)\right]\right\}$$
$$\simeq \boldsymbol{i}\left[-\frac{1}{2\nu_0}\beta\cos^2\theta\right]+\boldsymbol{j}\left[\frac{-i\beta}{2\nu_0}\right]+\boldsymbol{k}\left[\frac{\beta}{2\nu_0}\cos\theta\sin\theta\right].$$

因此，对于 $\theta=0$，即沿磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向的辐射(图 4.6)，$E_{1z}=0$，$E_{1x}=iE_{1y}$，也就是说，场强的 x 分量和 y 分量相等而相位差$\frac{\pi}{2}$，故为圆偏振波. 对 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即沿垂直磁场方向的辐射，$E_{1x}=E_{1z}=0$，$E_{1y}\neq 0$，所以是线偏振波. θ 取中间值时，一般为椭圆偏振波. 这和一开始的定性分析是完全一致的.

4.1.6 回旋辐射的谱线宽度及轮廓

由于一系列物理原因，将会引起回旋辐射谱线的展宽，现简单说明各种可能的展宽机制：

1. 辐射展宽. 此即熟知的谱线的自然宽度问题. 由于电子在辐射过程中损失能量，所以辐射只能持续一段有限长的时间，波列不可能无限长. 由傅氏分析可知，有限长的波列不是严格单色的，即谱线有一自然宽度. 频宽 $\Delta\nu$ 和电子辐射时间 τ 有关，$\Delta\nu\simeq\frac{1}{\tau}$，通常这是谱线的最小宽度.

2. 碰撞展宽. 由于电子在回旋运动中，经常和等离子体中其它粒子发生碰撞，造成辐射的暂时中断，从而也使辐射波列成为有限长，引起谱线加宽，这一机制引起的谱宽 $\Delta\nu$ 和平均两次相邻碰撞时间间隔 $\tau_{碰}=\frac{1}{\nu_{碰}}$有关，即 $\Delta\nu\simeq\frac{1}{\tau_{碰}}\simeq\nu_{碰}$，亦即 $\Delta\nu$ 近似等于碰撞

频率 $\nu_{磁}$.

3. 多普勒效应. 由于电子沿磁场方向的速度分量 $\beta_{/\!/}$ 各不相同,有一随机分布,这时各个电子辐射的多普勒频移将各不相同,使谱线加宽;如果平均热运动速度为 v_0,则谱线的多普勒宽度为 $\Delta\nu \simeq \nu\left(-\frac{v_{0/\!/}}{c}\right)\cos\theta$.

4. 质量的相对论变化. 由于质量 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma m_0$,而各个电子速度 β 不同,使它们具有不同质量值,从而在磁场中有不同的回旋频率$\left(\omega_0=\frac{eB}{mc}=\frac{1}{\gamma}\ \frac{eB}{m_0c}\right)$,这一线宽的数量级为 $\nu\left(\frac{v_0}{c}\right)^2$.

5. 辐射自吸收. 如果回旋辐射线的线心频率处的等离子体光学厚度 $\tau_0=k_\omega L\gtrsim 1$,则自吸收效应必须予以考虑. 这时线心处强度应相当接近该频率处的黑体辐射强度. 在 $\tau_0\gg 1$ 的光学厚情况下,只有黑体谱,谱线完全不出现;在 $\tau_0\ll 1$ 的光学薄情况下,可以出现细锐谱线. 在 $\tau_0\gtrsim 1$ 的中间情况,应当接近于黑体谱. 线心强度不得超过同一频率处的黑体辐射强度,结果使回旋辐射谱线能量分散在一个较宽的频率范围中. 在天体物理中认为这是一个重要的展宽机制.

6. 磁场的不均匀性. 由于 $\omega_0=\frac{eB}{mc}$,因而磁场 $\boldsymbol{B}$ 的强度不均匀,会引起谱线加宽,这一线宽的量级是①

$$\Delta\nu \simeq \frac{e}{2\pi mc}\Delta B.$$

最后谈谈回旋辐射谱线形状(或轮廓). 这里的讨论具有普适性;例如,也适用于原子光谱的轮廓讨论. 轮廓的分析有多方面的意义,例如,根据谱线形状可以知道哪种谱线展宽机制是主要因素,因为不同的展宽效应有不同的谱形. 辐射展宽和碰撞展宽中,有洛伦兹谱形,而多普勒展宽则产生高斯谱形. 这里对这两个典型

---

① 关于谱线展宽的详细讨论参见 Bakefi 著"Radiation Processes in Plasmas",1966.

的谱线轮廓做一简介.

先说辐射展宽的谱形.这一展宽机制产生于电子在辐射中能量的逐渐衰减,使得辐射场中任一点的场强具有阻尼振动形式(图4.9),

$$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_0e^{-\gamma t}\cdot e^{-i\omega_0 t},\qquad (t\geqslant 0)$$

即振幅随时间作指数衰减.γ 为阻尼系数.这是经典电磁理论中熟知的结果.由上式得知,振幅减小到原有值的 $1/e$ 所需时间 $\tau=\dfrac{1}{\gamma}$,通常称 τ 为辐射时间,也就是电子辐射寿命(在量子理论中,辐射电子寿命与其跃迁概率 A 有关,$\tau=\dfrac{1}{A}$,即经典观念中的衰减常数 γ 是和量子理论中的统计概念 A 联系着,$\gamma=A$).

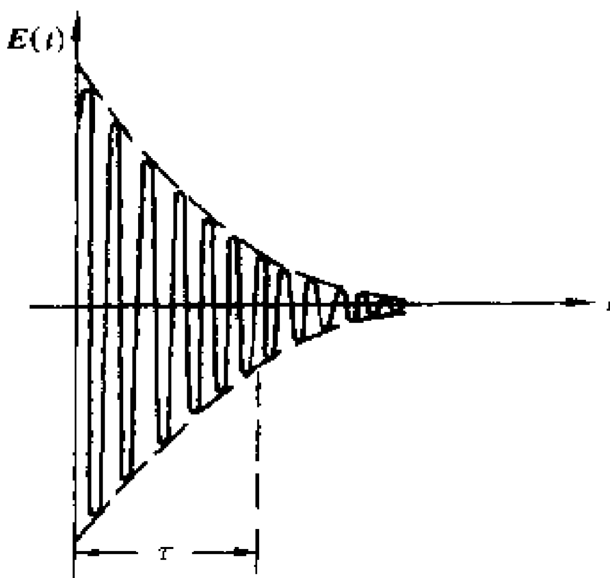


图 4.9

对于图 4.9 中所示的,实际上是有限时间 τ 内的辐射,不是严格的单色辐射,可以用傅氏分析找出它的频谱分布.

已知辐射强度与 $|\boldsymbol{E}|^2$ 成正比,所以整个辐射过程中的积分强度 I 和 $\int_0^\infty |\boldsymbol{E}|^2dt$ 成正比,按傅氏分析有

$$\boldsymbol{E}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\omega)d\omega e^{-i\omega t}.$$

单色振幅为

$$\boldsymbol{E}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\boldsymbol{E}(t)e^{i\omega t}dt$$

(因为 $t<0$ 时 $\boldsymbol{E}(t)=0$).代入 $\boldsymbol{E}(t)$ 的表示式,并完成积分,得到

$$\boldsymbol{E}(\omega)=\frac{\boldsymbol{E}_0}{2\pi}\frac{1}{[i(\omega-\omega_0)-\gamma]}=\frac{\boldsymbol{E}_0e^{i\theta}}{2\pi\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}},$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{(\omega_0-\omega)}{\gamma}.$$

按第一章介绍的帕塞瓦定理，积分强度为

$$I\propto\int_0^\infty|\boldsymbol{E}(t)|^2dt=4\pi\int_0^\infty|\boldsymbol{E}(\omega)|^2d\omega.$$

代入 $E(\omega)$ 的表达式得到

$$I=\int_0^\infty I(\omega)d\omega\propto 4\pi\int_0^\infty E(\omega)|^2d\omega$$

$$=\int_0^\infty\frac{E_0^2d\omega}{\pi[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2]}$$

由此得到各单色辐射的强度为

$$I(\omega)d\omega\propto\frac{d\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2},$$

写成等式则有

$$I(\omega)=\frac{I}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2},$$

或者

$$I(\omega)=\frac{I}{\pi\tau}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+1/\tau^2}.\tag{4.13}$$

(4.13)即辐射展宽的谱分布公式，它给出的谱线轮廓如图 4.10 曲线 a 所示，称为洛伦兹谱形. 由图可见，在 $\omega=\omega_0$ 处有一尖锐的极大，表示辐射频率基本上仍为 ω_0，只是有一个谱线宽度. 当 $\omega=\omega_0\pm\frac{1}{\tau}$ 时，$I(\omega)$ 减少到极大值的一半，因此，谱线的半宽度为

$$\Delta\omega=\frac{1}{\tau}.\tag{4.14}$$

碰撞加宽的谱形也是洛伦兹型，如果平均碰撞时间为 $\tau_{碰}$（碰撞频率 $\nu_{碰}$ 的倒数），则 $\tau_{碰}$ 即为每次辐射的平均持续时间. 因此，轮廓为

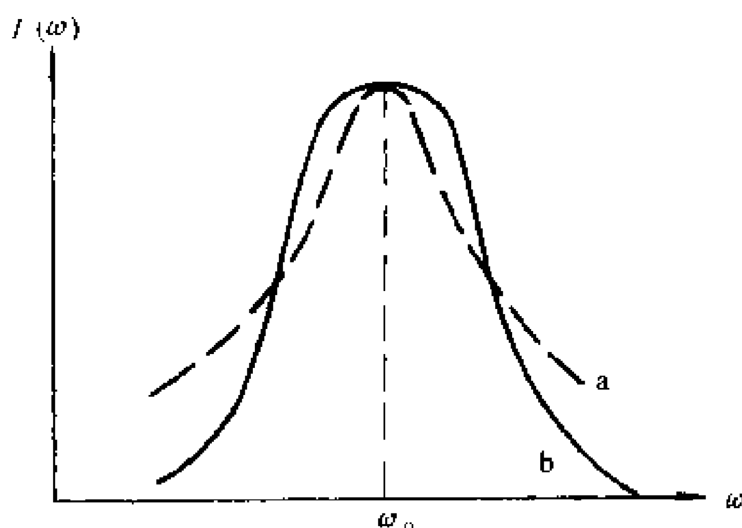


图 4.10

$$I(\omega)=\frac{I}{\pi\tau_{碰}}\cdot\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+1/\tau_{碰}^2},$$

或者

$$I(\omega)=\frac{I}{\pi}\cdot\frac{\nu_{碰}}{(\omega-\omega_0)^2+\nu_{碰}^2},\tag{4.15}$$

而半宽度是

$$\Delta\omega\simeq\frac{1}{\tau_{碰}}=\nu_{碰}.\tag{4.16}$$

最后谈谈多普勒展宽的谱形. 在图 4.6 中,如果电子沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的速度分量为 v_z,则将沿螺旋轨道运动. 电子将相对观测者有一速度 $v_z\cos\theta$,从而多普勒频移为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=\frac{v_z\cos\theta}{c}.\tag{4.17}$$

由于电子沿磁场的速度分量 v_z 将随机取值,于是造成了谱线加宽. 假设电子速度具有麦克斯韦分布;因为只有在观测方向上的速度分量对多普勒移动有贡献,因此只需考虑以下的麦克斯韦分布形式:

$$dn=n\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}\exp\left(\frac{-m_0v_z^2}{2kT}\right)dv_z.\tag{4.18}$$

其中 k 为玻耳兹曼常量. 把(4.17)代入(4.18)式[因为按(4.17),每一速度 v_z 对应一个确定的频移 $\omega-\omega_0$],则

$$I(\omega)d\omega=I_0\exp\left[-\frac{m_0c^2}{2kT}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0\cos\theta}\right)^2\right]d\omega, \qquad (4.19)$$

即多普勒展宽具有高斯分布形式 $\exp[-\alpha(\omega-\omega_0)^2]$,称为高斯谱形,如图 4.10 曲线 b 所示.

由(4.19)式可知,强度在频率 ω_0 处达到极大. 在(4.19)式中令 $I=\frac{I_0}{2}$,求出的频率差为

$$\omega-\omega_0=\pm\ \omega_0\sqrt{2\cdot\ln 2\cdot\frac{kT}{m_0c^2}}$$

因此半宽度为

$$\Delta\omega=\omega_0\sqrt{2\cdot\ln 2\cdot\frac{kT}{m_0c^2}}, \qquad (4.20)$$

故多普勒展宽 $\Delta\omega\propto\sqrt{T}$.

由图 4.10 可以看出,以上两种最主要的谱形之间的不同(两种轮廓被归一化为具有相同的极大值和相同的半宽度).

由于实际的展宽机制经常不只是一种,一般而言,谱形既不是典型的洛伦兹形,又不是典型的高斯型. 但由图 4.10 可以预料,多普勒效应对谱线中心形状将起决定作用,而碰撞效应则对谱线的两翼形状起决定作用.

4.1.7 经典理论的适用范围

到此为止,完全是用经典辐射理论处理回旋辐射. 第一章已经指出,只有当辐射光子的能量 $\hbar\omega$ 远小于电子动能时. 这一经典处理才是正确的. 对于非相对论电子,如果用 E_{eV} 表示以电子伏为单位的电子的动能时,则不等式 $\hbar\omega_0\ll E$ 可以写成

$$B\ll 10^8E_{eV}\qquad (\mathrm{Gs}),$$

B 是磁场强度. 这就是回旋辐射经典理论适用的条件. 显然,在接近中子星表面的强磁场区($B\simeq 10^{12}$Gs)时,就不能忽视量子效应

了.

4.1.8 回旋辐射的量子理论,跃迁概率,回旋共振吸收,回旋共振吸收(或共振散射)截面

由于近年X射线和γ射线天文学的快速进步,有必要发展强磁场中回旋辐射的量子理论,进一步改进、细化有关回旋辐射的系列公式(如跃迁概率,吸收系数,吸收或散射截面等).许多作者用量子场论(QED)方法探讨了相对论电子在强磁场中回旋共振散射过程(H. Herold, *Phy. Rev.*, D. **19**, 2868, 1979, Daugherty, J. K., Harding, A. K., *Ap. J.*, 309, 1986, 362; Dermer. C. D., *Ap. J.*, 360, 1990, 197. 等).但QED方法超出本书范围,并且他们给出的公式相当繁复,缺少简明性和易懂性.本书作者及其同事(尤峻汉,陈军峰等,中国科学A,1997年,第27卷,第8期,731页)采用半经典量子理论,(即只考虑磁场中做朗道回旋的电子运动的量子化,用薛定谔方程描述,而辐射场则仍采用经典麦克斯韦-洛伦兹方程描写)重新探讨了回旋辐射机制,给出的共振散射截面公式在共振频率附近和QED结果精确地一致,但形式简洁,物理清晰易懂,在高能天体物理中更具实用性.限于篇幅,本书略去详细推导,只谈物理思路,理论要点,最后列出有用的基本公式.

正如第二章指出的,量子理论中,将辐射视做能级跃迁过程,核心问题即计算跃迁概率(截面).在半经典处理中,采用含时微扰论.要点是首先计算电子在外来电磁波扰动下(微扰哈密顿为$\hat{H}'(x,t)$)由基态$l\to$激发态u之吸收跃迁概率,得到爱因斯坦感应吸收跃迁系数b_{lu},再由三个爱因斯坦系数a_{ul}, b_{ul}, b_{lu}之间的热力学关系(第二章(2.4),(2.7)式),求出自发跃迁概率$a_{u\to l}$,全部计算核心是求单色微扰矩阵元$\hat{H}'_{ul}(\omega_{ul})$.为此,首先要找出问题中的微扰算符$\hat{H}'(\boldsymbol{r},t)$.对于给定的沿$z$轴的强磁场$\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$,相应势函数记做$(\boldsymbol{A},\varphi)$,在库仑规范下,$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, \varphi=0$,可取$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}=-\frac{B}{2}y\boldsymbol{i}+\frac{B}{2}x\boldsymbol{j}$,于是描写强磁场中电子运动的薛定谔方程是(不

计电子自旋)：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2+\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e^2A^2}{2m_0c^2}\right]\psi, \tag{4.21}$$

故零级哈密顿(即电子未受到外来电磁波扰动前)为

$$\begin{aligned}\hat{H}_0&=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2+\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e^2A^2}{2m_0c^2}\\&=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2+\frac{e^2B^2}{8m_0c^2}(x^2+y^2)+\frac{eB}{2m_0c}\hat{L}_z.\end{aligned} \tag{4.22}$$

在柱坐标(ρ,φ,z)下求解(4.21)式，其中z轴沿$\boldsymbol{B}$方向，$x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，$z=z$，得到定态能级和定态波函数分别为

$$E_{n_\rho,m,K_d}=\left(n_\rho+m+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_B+\frac{\hbar^2K_d^2}{2m_0},$$

及

$$\begin{aligned}\psi_{n_\rho,m,K_d}(\rho,\varphi,z)&=\sqrt{\frac{2\alpha^{2m+2}(m+n_\rho)!}{n_\rho!\cdot(m!)^2}}\rho^m e^{\frac{\alpha^2\rho^2}{2}}\\&\quad\times F(-n_\rho,m+1,\alpha^2\rho^2)\Phi_m(\varphi)Z_{k_d}(z)\\&=\chi_{n_\rho,m}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_{K_d}(z),\end{aligned} \tag{4.23}$$

其中$\omega_B=\dfrac{eB}{m_0c}$，$\alpha=\sqrt{\dfrac{eB}{2\hbar c}}$，$\Phi_m(\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$，$Z_{k_d}(z)=\dfrac{1}{\sqrt{L}}e^{iK_dz}$($L$是箱归一化系数).(参见曾谨言，“量子力学”，科学出版社，1989).由于电子在磁场中回旋方向与$\boldsymbol{B}$方向永为右手螺旋关系，故角动量方向与$\boldsymbol{B}$一致，作为磁量子数(角动量投影量子数)的m只能取正整数，$m=0,1,2,\cdots$. $Z_{k_d}(z)$描写电子沿$\boldsymbol{B}$方向自由运动，K_d为Z方向德布罗意波矢. $F(-n_\rho,m+1,\alpha^2\rho^2)$为超越几何函数，定义为一幂级数

$$\begin{aligned}F(-n_\rho,m+1,\alpha^2\rho^2)&=1+\frac{-n_\rho}{m+1}\alpha^2\rho^2\\&\quad+\frac{-n_\rho(-n_\rho+1)}{2!(m+1)(m+2)}\alpha^4\rho^4+\cdots\end{aligned}$$

其中$n_\rho=0,1,2,\cdots$，k_d则可连续取值.(4.23)中的$\chi_{n_\rho,m}(\rho)\Phi_m(\varphi)$

描写电子在垂直 $\boldsymbol{B}$ 的(x,y)平面上的运动(对应于经典的"圆轨道"). 将此定态波函数(朗道波)和定态能级(朗道能级)作为计算中的零级波和零级能,再以外来的 X 射线平面波作为微扰,采用含时微扰论方法求解. 为计算简便,先假定外来电磁波是一束简单的波矢为 $\boldsymbol{k}$,偏振方向单位矢为 $\boldsymbol{l}$、频率为 ω 的单色平面波,尔后推广到实际情况的自然波. 该扰动波的势函数记为$(\boldsymbol{A}',\varphi')$,则

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t)=A'(\omega t)\boldsymbol{l}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\quad \varphi'=0 \tag{4.24}$$

此时方程(4.21)式推广成

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\hat{H}_0+\hat{H}')\psi, \tag{4.21'}$$

其中 $\hat{H}_0$ 是零级哈密顿,由(4.22)式表示,而微扰哈密顿则为

$$\hat{H}'(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{A}'\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right), \tag{4.25}$$

其中 $\boldsymbol{A}'$ 由(4.24)式表示,故微扰哈密顿 $\hat{H}'(\boldsymbol{r},t)$ 显含 t. 在含时微扰下,(4.21')式解出的波函数 $\psi=\psi(\boldsymbol{r},t)$ 必显含 t,暗示态随时间变化,而不可能稳居某一定态上,会从某一定态 $\psi_{n_\rho,m,K_d}(\rho,\varphi,z)$ 吸收(或放出)光子 $\hbar\omega$ 跃到另一定态 $\psi_{n'_\rho,m',k'_d}(\rho,\varphi,z)$. 这一跃迁概率决定于初、终两态$(l,u)$间的微扰矩阵元 $H'_{ul}(\omega_{ul})$,因此关键就是计算 $H'_{ul}(\omega_{ul})$.

当电子吸收光子 $\hbar\omega$ 由 $|n_\rho,m,k_d\rangle$ (l 态)跃迁到 $|n'_\rho,m',k'_d\rangle$ (u 态)时,应满足能量、动量守恒:

$$\hbar\omega=E_u-E_l=(n'_\rho+m'-n_\rho-m)\hbar\omega_B+\frac{\hbar^2K'^2_d}{2m_0}-\frac{\hbar^2K^2_d}{2m_0}$$

$$\simeq N\hbar\omega_B+\frac{1}{2m_0}\hbar^2K'^2_d,$$

$$\hbar K'_d-\hbar K_d\simeq\hbar K'_d=\hbar k\cos\theta=\frac{\hbar\omega}{c}\cos\theta, \tag{4.26}$$

其中 $N\equiv(n'_\rho+m'-n_\rho-m)=1,2,3\cdots$ 是正整数.

注意到在强磁场中,例如 $B\sim10^{12}$Gs,有 $\hbar\omega_B\simeq10$keV. 而即使电子气温度 T 高达$\sim10^6$K,kT 也仅及~0.1keV,故(4.26)式中忽

略了电子沿 z 方向热运动的初动能和初动量，$\frac{1}{2m_0}\hbar^2K_d^2\simeq 0$，及 $\hbar K_d \simeq 0$，(4.26)式简化为

$$\hbar\omega = E_u - E_l \simeq N\hbar\omega_B + \frac{\hbar^2\omega^2}{2m_0c^2}\cos^2\theta \simeq N\hbar\omega_B, \quad (4.27)$$

上式中最后一步近似，是由于$\left(\frac{\hbar\omega}{2m_0c^2}\cos^2\theta\right)\hbar\omega\simeq 0.01\hbar\omega \gtrsim 0.01\hbar\omega_B \ll N\hbar\omega_B$. (4.27)式表明，吸收具有共振性质. 只当外来光子能 $\hbar\omega\simeq N\hbar\omega_B$(误差不超过 1%)，即 $\hbar\omega$ 等于各朗道能级间隔时，吸收才可能. 亦即外来 X 射线光子(~10keV)仅将其极小一部分(~1%$\hbar\omega$)贡献于改变电子沿磁场方向自由平动的动能. 故以下只限于讨论有实际意义的 $\omega=\omega_{ul}\simeq N\omega_B$ 的外来辐射波的吸收跃迁. 按第二章(2.22)及(2.33′)式，单位时间由 $l\to u$ 的吸收跃迁概率为

$$P_{l\to u} = \frac{1}{T}\left(\frac{4\pi^2}{\hbar^2}\right)|H'_{ul}(\omega_{ul})|^2 = \frac{1}{T}\left(\frac{4\pi^2}{\hbar^2}\right)|H'_{ul}(N\omega_B)|^2,$$

故跃迁决定于单色微扰矩阵元 $H'_{ul}(N\omega_B)$. 由此，按第二章(2.35)式到(2.38)式步骤，即可求出爱因斯坦感应吸收系数 $b_{l\to u}$，从而由(2.7)式给出的热力学关系定出自发跃迁概率 a_{ul}以及由(3.33)式由 a_{ul}求出回旋共振吸收系数 $k_\nu^{cy}(\theta)$，再由 $k_\nu^{cy}(\theta)\simeq N_l\sigma$ 导出微观量回旋共振吸收截面 $\sigma(\nu,\theta)$，(详细推导参见尤峻汉、陈军峰，中国科学 A 辑，1997，第 27 卷，第 8 期).

现将主要结果列出如下：

A. 自发跃迁概率 a_{ul}

把电子朗道能级基态，第一激发态，第二激发态……分别记为 0，1，2，…，则由第一激发态 $u=1\left(n'_\rho=1, m'=0, K'_d=\frac{\omega_B}{c}\cos^2\theta\right)$到基态 $l=0$(即 $n_\rho=m=k_d=0$)的基频 ω_B 的跃迁概率

$$a_{1,0} = \left(\frac{e^2\omega_B^2}{m_0c^3}\right)(1+\cos^2\theta) = 2.91\times 10^{-9}B^2(1+\cos^2\theta)(\mathrm{s}^{-1}). \quad (4.28)$$

由第二激发态 $u=2(n'_\rho=0, m'=2, K'_d=\frac{2\omega_B}{c}\cos\theta)$ 到基态 $l=0$ 的倍频 $2\omega_B$ 的自发跃迁概率（四极近似下不为零）

$$
\begin{aligned}
a_{2,0} &= \frac{8e^2\hbar\omega_B^3}{m_0^2c^5}(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta \\
&= 5.28\times10^{-22}B^3(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta(\mathrm{s}^{-1}).
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

在四极近似下，更高阶激发态 $u=N(N\geq3)$ 到基态 $l=0$ 的高次谐波跃迁概率一律为 0，

$$
a_{u\to l} = a_{N,0} = 0 \qquad (N \geq 3).
\tag{4.30}
$$

可见，在偶极近似下，只有相邻朗道能级间基频辐射跃迁才是可能的($\omega=\omega_B$)．而在精确到四极近似时，则除去基频 ω_B 外（跃迁概率仍近似用(4.28)式表示，只是有极小的系数修正)，还产生较弱的倍频 $\omega=2\omega_B$ 的回旋辐射线．但三次以上谐波成分($3\omega_B, 4\omega_B$, …)在四极近似下是禁戒的．

由量子公式(4.28)可求出基频回旋辐射的角分布功率．按第二章(2.1)式，某次自发跃迁中，产生的频率为 ω_B 的光子沿某一给定方向立体角元 $d\Omega$ 传播的跃迁概率是 $dP_s=a_{1,0}\frac{d\Omega}{4\pi}$，故每秒由自发跃迁产生的沿 $d\Omega$ 方向的频率是 ω_B 的辐射功率为 $dp=a_{1,0}\frac{d\Omega}{4\pi}\hbar\omega_B$，代入(4.28)式的 $a_{1,0}$ 值，则有

$$
\frac{dP_1}{d\Omega} = a_{1,0}\left(\frac{d\Omega}{4\pi}\right)\hbar\omega_B = \frac{e^2\hbar\omega_B^3}{4\pi m_0c^3}(1+\cos^2\theta).
\tag{4.31}
$$

因辐射光子能量 $\hbar\omega_B$ 由朗道电子动能转化而来，即有 $\hbar\omega_B\simeq\frac{1}{2}m_0\bar{v}^2$，因而(4.31)式成为

$$
\frac{dP_1}{d\Omega} = \frac{\pi e^2\beta^2\nu_B^2}{2c}(1+\cos^2\theta),
\tag{4.12'}
$$

其中 $\beta=v/c$，(4.12′)式和经典公式(4.12)精确一致，证实了量子公式的正确．

由(4.28)式和(4.29)式可见，基频 ω_B 辐射跃迁概率 $a_{1,0}\propto\omega_B^2\propto B^2$，而倍频成分 $a_{2,0}\propto\omega_B^3\propto B^3$，因而强磁场中（例如 $B\sim10^{12}\mathrm{Gs}$），

硬 X 射线波段($\hbar\omega \simeq \hbar\omega_B \sim 10\text{keV}$)的回旋共振发射线的跃迁概率很大,$a_{1,0} \simeq 10^{15}/\text{s}$,故第一激发态寿命仅 $\tau_1 \simeq 10^{-15}\text{s}$. 倍频跃迁 $a_{2,0} \simeq 10^{14}/\text{s}$. 电子在激发态朗道能级上寿命极短,回旋辐射跃迁几乎是"瞬时"发生,说明在强磁场中电子在高朗道能级 $u=1,2,3\cdots$ 上的布居数实际上几乎为零,$N_1 \sim N_2 \sim N_3 \cdots = 0$. 只有基态 $N_0 \neq 0$,电子几乎全部处于基态. 这对讨论强磁场中朗道电子的吸收和线发射非常重要. 很大的跃迁概率 $a_{u\to l}$ 还说明,当基态($l=0$)电子通过共振吸收跃迁到高激发态 $u=1$ 或 $u=2$ 时,会"瞬时"自发辐射跃迁回到基态 $l=0$. 这种吸收—再发射等效于一次散射. 这就是文献上经常将"回旋共振吸收"与"回旋共振散射"等同的道理.

B. 回旋共振吸收系数 k_ν^{cy}

由于激发态粒子数 $N_1 \sim N_2 \sim N_3 \cdots = 0$,故只需考虑处在基态朗道轨道上的电子($n_p = m = K_d = 0$)的共振吸收即可. 设外来 X 射线连续谱中含有 $\omega = \omega_B, 2\omega_B$ 成分,此辐射束以 θ 角穿过外磁场(图 4.11)受到磁等离子体中朗道基态电子的回旋共振吸收,得到的回旋共振吸收系数为:

1. 由基态 $l=0$($n_p = m = K_d = 0$)到第一激发态 $u=1$ 的基频

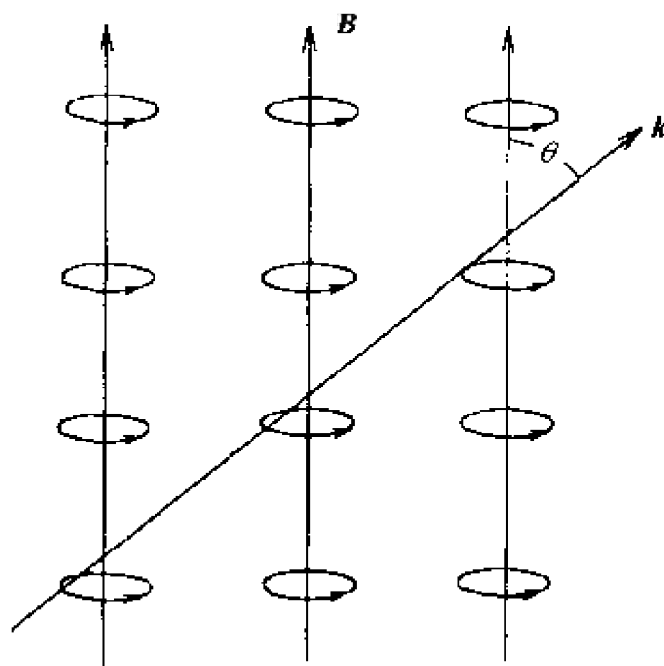


图 4.11

ω_B 的吸收系数为(推导方法见第三章(3.33)式)

$$k_{0,1}^{cy} = \frac{1}{2}\pi r_0 c N_l (1 + \cos^2\theta), \tag{4.32}$$

其中 $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ 是电子经典半径. 写出(4.32)式时已略去非常接近于1的一个四极修正因子. 但实际上,由于谱线展宽,吸收并不精确发生在共振频率 ν_B,而是分布于 $\nu \sim \nu_B$ 近邻窄频段上. 故应将(4.32)式乘以一谱线展宽轮廓因子 $\varphi(\nu - \nu_B)$,得到

$$\begin{aligned} k_{0,1}^{cy}(\nu,\theta) &= \frac{1}{2}\pi r_0 c N_l (1 + \cos^2\theta)\varphi(\nu - \nu_B), \\ &= 1.327 \times 10^{-2} N_l (1 + \cos^2\theta)\varphi(\nu - \nu_B)\ (\mathrm{cm}^{-1}) \end{aligned} \tag{4.33}$$

式中 $\varphi(\nu - \nu_B)$ 满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\nu - \nu_B) d\nu = 1. \tag{4.34}$$

如果只考虑谱线自然展宽,则轮廓因子当为洛伦兹形:

$$\varphi(\nu - \nu_B) = \frac{\Gamma_{lu}/4\pi^2}{(\nu - \nu_B)^2 + (\Gamma_{lu}/4\pi)^2}, \tag{4.35}$$

其中量子阻尼常数为 $\Gamma_{lu} = \Gamma_u + \Gamma_l = \sum_{k<u} A_{uk} + \sum_{k<l} A_{lk}$,对于 $0 \to 1$ 的基频 ω_B 跃迁,$\Gamma_{lu} = \Gamma_1 = A_{1,0} = \frac{1}{4\pi}\int a_{1,0} d\Omega = \frac{4e^2\omega_B^2}{3m_0c^3}\left(1 + \frac{3\hbar eB}{10m_0^2c^3}\right)$.(见(4.28)式中之 $a_{1,0}$ 表示). 在线心 $\nu = \nu_B$ 处,$\varphi(\nu_B) = \frac{4}{\Gamma_{lu}} = \frac{4}{A_{1,0}}$. 故线心吸收系数为

$$\begin{aligned} \kappa_{0,1}^{cy}(\nu_B) &= 2\pi r_0 c N_l (1 + \cos^2\theta) \frac{1}{A_{1,0}}, \\ &= 1.16 \times 10^8 B^{-2} N_l (1 + \cos^2\theta) \quad (\mathrm{cm}^{-1}) \end{aligned} \tag{4.36}$$

式中 $A_{1,0} = \frac{1}{4\pi}\int a_{1,0} d\Omega$ 是对方向平均的 $1 \to 0$ 自发跃迁概率.

但对高温等离子体,例如 $T \simeq 10^6$—10^7K,热电子沿 $\boldsymbol{B}$ 方向有明显的自由热运动,速度 V_z 具有麦克斯韦分布(在垂直 $\boldsymbol{B}$ 方向电子束缚于朗道轨道上,没有热运动),V_z 在射束方向的投影分量为

$V_z\cos\theta$. 相应的多普勒频移为 $\Delta\nu/\nu_B=\dfrac{V_z}{c}\cos\theta$，将使吸收谱线热展宽，(4.33)式中的形状因子应取高斯形：

$$\varphi(\nu-\nu_B)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\nu-\nu_B)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{4.37}$$

其中 $2\sigma^2\equiv\dfrac{2kT\nu_B^2\cos^2\theta}{m_0c^2}$，由(4.37)式求出的多普勒展宽的谱线半极大宽度为

$$\Delta\nu_D=\nu_B\sqrt{2\ln2\left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)}\cos\theta, \tag{4.38}$$

按归一化条件(4.34)式，可求出线心处 $\varphi(\nu_B)\simeq\dfrac{1}{\Delta\nu_D}$. 故线心 $\nu=\nu_B$ 处的吸收系数为

$$\kappa_{0,1}^{cy}(\nu_B)=\frac{1}{2}\pi r_0cN_l(1+\cos^2\theta)\frac{1}{\Delta\nu_D}. \tag{4.39}$$

2. 基态 $l=0$ 到第二激发态 $u=2$ 的倍频 $2\nu_B$ 的回旋共振吸收系数为

$$\begin{aligned}\kappa_{0,2}^{cy}(\nu,\theta)&=\left(\frac{\pi e^2\hbar\omega_B}{m_0^2c^3}\right)N_l(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta\varphi(\nu-2\nu_B)\\&=\left(\frac{\hbar\omega_B}{m_0c^2}\right)\pi r_0cN_l(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta\varphi(\nu-2\nu_B).\\&=6.021\times10^{-15}BN_l(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta\varphi(\nu-2\nu_B)\end{aligned} \tag{4.40}$$

关于 $\varphi(\nu-2\nu_B)$ 的取法类前.

3. 基态 $l=0$ 到高激发态 $u=N(N\geq3)$ 的吸收系数(对高次谐波 $N\nu_B$ 的吸收)，在准到四极近似下，一律有

$$\kappa_{0,N}^{cy}(\nu,\theta)=0. \tag{4.41}$$

比较(4.33)和(4.40)式不难发现，即使磁场 B 高达 $\sim10^{12}$Gs 情况下，也只有 $\kappa_{0,2}^{cy}/\kappa_{0,1}^{cy}\simeq10^{-1}—10^{-2}$，即倍频吸收远较基频为弱，这和观测一致.

C. 电子回旋共振吸收(共振散射)截面

由吸收系数不难求出处于基态的朗道电子的回旋共振散射截面(也叫回旋共振吸收截面). 作为微观量的共振吸收截面 $\sigma_{lu}(\nu,\theta)$ 与吸收系数 $\kappa_{lu}^{\gamma}(\nu,\theta)$ 的关系自然是

$$\kappa_{lu}^{\gamma}(\nu,\theta) = N_l \sigma_{lu}(\nu,\theta). \tag{4.42}$$

由(4.33)、(4.40)、(4.41)式即得:

1. 由基态 $l=0$ 到第一激发态 $u=1$ 的共振吸收(共振散射)截面是

$$\sigma_{0,1}(\nu,\theta) = \frac{1}{2}\pi r_0 c(1+\cos^2\theta)\varphi(\nu-\nu_B), \tag{4.43}$$

其中

$$\varphi(\nu-\nu_B) = \frac{\Gamma_{lu}/4\pi^2}{(\nu-\nu_B)^2+(\Gamma_{lu}/4\pi)^2}.$$

这里轮廓因子 $\varphi(\nu)$ 必须取自然展宽形,即洛伦兹形. 道理是:截面是一个微观量,是描写一个电子的吸收特性的量. 对于单个电子而言,不存在多普勒展宽效应,电子沿磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向的速度为 V_z 的自由运动,至多造成多普勒固定值的频移($\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{V_z}{c}\cos\theta$). 如果变换到随行参考系 S' 中看(即 S' 沿 $\boldsymbol{B}$ 方向也以 V_z 平动),连此仅有的频移也被消除. 对单个电子,唯一的展宽效应是自然展宽.

2. 基态 $l=0$ 到第一激发态 $u=2$(倍频),共振吸收(散射)截面是

$$\sigma_{0,2}(\nu,\theta) = \left(\frac{\hbar\omega_B}{m_0c^2}\right)\pi r_0 c(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta\varphi(\nu-2\nu_B). \tag{4.44}$$

如果代入电子经典半径 $r_0=\frac{e^2}{m_0c^2}$,磁中子星临界磁场 $B_{cr}=\frac{m_0^2c^3}{e\hbar}=4.4\times10^{13}\text{Gs}$,则(4.44)式成为

$$\sigma_{0,2}(\nu,\theta) = \pi r_0 c\left(\frac{B}{B_{cr}}\right)(1+\cos^2\theta)\sin^2\theta\varphi(\nu-2\nu_B), \tag{4.45}$$

其中 $\varphi(\nu-2\nu_B)$ 仍取洛伦兹形,由(4.43),(4.44)式可见强磁场中

电子回旋共振散射截面非常大，远大于自由电子的散射截面 $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$. 就以基频共振散射截面(4.43)式为例，在线心 $\nu = \nu_B$ 处，截面

$$\sigma_{0,1}(\nu_B,\theta) = \frac{2\pi r_0 c}{A_{1,0}}(1-\cos^2\theta) \simeq \frac{2\pi r_0 c}{A_{1,0}} \simeq 10^8 \sigma_T$$

$$\left(\text{当} B \simeq 10^{12}\text{Gs 时}, A_{1,0} = \frac{4e^2\omega_B^2}{3m_0^2c^3}\left(1+\frac{3\hbar eB}{10m_0^2c^3}\right) \simeq 10^{15}\text{s}^{-1}\right).$$

这一特点非常重要，暗示强磁场中沿磁力线滑行的相对论电子的逆康普顿散射将因其共振性质而变成非常地有效，是远比自由电子逆康普顿散射更为有效的辐射机制. 为了和自由电子逆康普顿散射有所区别，本书将强磁场中相对论电子的逆康普顿散射过程称为磁逆康普顿散射. 它是 γ 射线天文学中的十分重要的辐射机制. 关于逆康普顿散射和磁逆康普顿散射的辐射机理，将在第五章中详述.

D. 回旋共振散射微分截面 $\sigma_{lu}(\nu,\theta,\theta')$

上节(4.43)，(4.44)式给出的实际是回旋共振散射总截面，而不问散射光子方向. 已经指出，这里说的散射实为吸收和再发射过程，因而再发射的角分布实即散射光角分布，它由(4.28)，(4.29)式的自发跃迁概率公式给出，因此，不难由(4.28)，(4.29)和总散射截面公式(4.43)和(4.44)式直接导出电子回旋共振散射微分截面 $\sigma_{lu}(\nu,\theta,\theta')$. 其中 θ 是被吸收的入射光子方向角，θ' 则为散射光子方向角，θ,θ' 都是光子飞行方向和磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向的夹角.

1. 由基态 $l=0$ 到第一激发态 $u=1$ 再回到 $l=0$ 的微分散射截面是

$$\sigma_{0,1}(\nu,\theta,\theta') = \left(\frac{3r_0c}{32}\right)(1+\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta')\varphi(\nu-\nu_B). \tag{4.46}$$

上式与(4.43)式总截面 $\sigma_{0,1}(\nu,\theta)$ 相比还多出一个因子$\frac{3}{16\pi}$，它是来自以下关系式的要求，即

$$\int_0^\pi \sigma_{0,1}(\nu,\theta,\theta')2\pi\sin\theta' d\theta' = \sigma_{0,1}(\nu,\theta) \tag{4.47}$$

2. 基态$l=0$到第二激发态$u=2$的倍频微分散射截面$\sigma_{0,2}(\nu,\theta,\theta')$，请读者自己完成.

3. 由基态$l=0$到$u=N(N\geq 3)$的高次谐波微分散射截面皆为零，$\sigma_{0,N}(\nu,\theta,\theta')=0$（当$N\geq 3$，四极近似下）.

§4.2 同步加速辐射

在天体物理学中，和回旋辐射相比，极相对论电子在磁场中的同步辐射是一个更重要的过程. 因为目前普遍认为，大多数非热的宇宙射电辐射正是这种同步辐射. 例如，类星体、射电星系、一般星系的射电发射、超新星残迹的射电辐射，甚至在太阳的射电发射中也观测到同步辐射过程. 此外，在蟹状星云、很多的射电星系，以及在类星体和其他活动星系核中，还观测到可见光和 X 射线的同步辐射.

4.2.1 相对论电子在磁场中的运动方程

与讨论非相对论电子回旋辐射类似，应该首先说明磁场中相对论电子的运动情况. 电子运动方程仍由(4.1)给出，即

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\frac{d}{dt}(\gamma m_0\boldsymbol{v})=\frac{-e}{c}(\boldsymbol{v}\times B).$$

在均匀磁场中，$\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$，上式的分量表达式为

$$\frac{d}{dt}(\gamma\dot{x})=\frac{-cB}{m_0c}\dot{y},\quad \frac{d}{dt}(\gamma\dot{y})=\frac{eB}{m_0c}\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\dot{z})=0. \tag{4.48}$$

注意

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d}{dt}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=\gamma^3(\beta\cdot\dot{\beta})\equiv 0,$$

则可将运动方程简化为

$$\ddot{x}=\frac{-eB}{\gamma m_0c}\dot{y},\qquad \ddot{y}=\frac{eB}{\gamma m_0c}\dot{x},\qquad \ddot{z}=0. \tag{4.49}$$

如果将式中的常数记为

$$\omega_0 = \frac{eB}{\gamma m_0 c} = \frac{eB}{mc},$$

则(4.49)式的解就是上一节的(4.3′)式，即相对论电子在磁场中同样是沿螺旋轨道或圆轨道运动，只是转动频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L,$$

比拉摩频率小 γ 倍，显然这是质量高 γ 倍所致.

请读者留心，相对论电子在磁场中，初看是频率 ω_0 的圆周运动或螺旋运动，而实际上常更近似于直线. 由于电子 $v \lesssim c$，圆半径 $r \simeq c/\omega_0$ 很大. 例如一个 $\gamma = 10^3$ 的高能电子在 $B \sim 10^{-5}$Gs 的星系磁场中，拉摩频率 $\omega_L \simeq 10^2$，$\omega_0 \simeq 10^{-1}$. 由此得 $r \simeq 10^{11}$cm 即半径量级竟为百万公里，这和强磁场中非相对论电子回旋运动很不同.

4.2.2 同步辐射的总功率，辐射寿命的估计

由于是相对论电子，可以引用第一章(1.26)式给出的辐射功率，即

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c}\gamma^6[\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2].$$

类似于回旋辐射的讨论，我们希望用场强 $\boldsymbol{B}$ 和速度 $\boldsymbol{\beta}$ 表示功率. 所以最好采用(1.27)式，即

$$\begin{aligned} P = \frac{dW}{dt} &= \frac{2r_0^2 c}{3}\gamma^2(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B})^2 \\ &= \frac{2r_0^2 c}{3}\gamma^2\beta^2 B^2 \sin^2\alpha, \end{aligned} \tag{1.27}$$

式中 $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ 即电子经典半径. 将(1.27)式代入各物理常数，得到

$$P = 1.6 \times 10^{-15}\gamma^2\beta^2 B^2 \sin^2\alpha \qquad (\text{erg/s}). \tag{4.50}$$

对于具有各向同性速度分布的电子，则

$$\overline{P} = \frac{4}{9}r_0^2 c\gamma^2\beta^2 B^2 = 1.1 \times 10^{-15}\gamma^2\beta^2 B^2 \qquad (\text{erg/s}). \tag{4.51}$$

比较(4.50)式与(4.5)式，或者比较(4.51)式与(4.6)式，可见

相对论电子辐射功率不同于非相对论电子，非相对论电子辐射功率正比于电子能量，而相对论电子辐射功率正比于电子“能量”γ的平方（注意，相对论电子 $\beta\simeq1$），并且相对论电子（$\gamma\gg1$，$\beta\simeq1$）的功率远大于非相对论电子的功率.

根据电子辐射功率(4.50)可以估计相对论电子的辐射寿命 t_{sy}（由于辐射失去大部分能量的时间）. 本章开头的定性分析指出，相对论电子大部分辐射是在峰频 ν_m 附近发出的，对于一个“能量”是 γ，投射角是 α（电子速度 $\boldsymbol{\beta}$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 的夹角）的电子，峰频是

$$\nu_m\simeq \nu_L\cdot \gamma^2\sin\alpha \simeq 3\times 10^6 B\gamma^2\sin\alpha \quad (\mathrm{Hz})$$

$$\simeq 1\times 10^7 B E_{\mathrm{MeV}}^2\sin\alpha \quad (\mathrm{Hz}). \tag{4.52}$$

这里 E_{MeV}是以 MeV 为单位的电子能量. 与第一节的定性公式不同，在 ν_m 的公式中出现了因子 $\sin\alpha$，使得公式既适用于圆轨道，也适用于螺旋轨道. 对于后者，是磁场 $\boldsymbol{B}$ 在垂直电子速度$\boldsymbol{v}$ 方向的投影 $B_\perp=B\sin\alpha$ 上起作用，可以把 $B_\perp$ 称为有效磁场.

根据(4.50)式，能量为 E 的电子由于辐射失去大部分能量的时间是

$$t_{sy}=E/P\simeq 5\times 10^8/\gamma\beta^2B^2\sin^2\alpha \quad (\mathrm{s}). \tag{4.53}$$

利用(4.52)式给出的主要辐射频率（峰频），于是电子的辐射寿命可以表示成

$$t_{sy}=\frac{8.7\times 10^{11}}{B^{3/2}\cdot \nu_m^{1/2}\cdot \sin^{3/2}\alpha} \quad (\mathrm{s}). \tag{4.54}$$

用频率 ν_m 换下能量 γ 来表示寿命 t_{sy}，好处是 γ 不是直接观测量，而 ν_m 可以由观测定出.

对于某些辐射源，源的年龄比电子寿命长很多. 这表明，源中存在某种连续产生高能电子的机制，使这个辐射源得以维持. 例如，蟹状星云中存在的磁场约为 10^{-4}Gs，对于其中能产生平均辐射频率约为 10^{18}Hz（X 射线）的相对论电子，其辐射寿命仅约 20 年，而蟹状星云年龄已近 1000 年了. 以上情况表明，源中有使电子能量增大到 10^8MeV 的连续加速机制，这个连续运转的“高能加速器”一直是一个谜，直到在蟹状星云中心处发现一颗脉冲星之后才

算得到解释.

在写出相对论电子运动方程(4.49)时,忽略了辐射阻尼力的作用,因而磁场中电子近似满足机械能守恒定律,使得电子有稳定的螺旋或圆轨道. 能够忽略辐射损失的理由是,电子在每一周期的运动中辐射的能量远小于电子能量,即电子回转周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ 远小于电子辐射寿命 t_{sy},即比率

$$\frac{2\pi}{\omega_0 \cdot t_{sy}} = 10^{-15}B\gamma^2 \ll 1. \tag{4.55}$$

对于辐射频率 ν_m 显著小于 2×10^{21}Hz 的相对论电子(该频率对应于能量约 10MeV 的 γ 光子),以上不等式总是满足的. 所以,除去硬 γ 射线之外,都可略去电子的辐射阻尼力,可以近似地认为,电子能量在有限几圈的轨道运动中是恒定的.

4.2.3 同步辐射的角分布

这个问题已在第一章讨论相对论电子辐射时作了详细讨论,这里只重复写出结论.

1. 由于是极相对论电子的辐射,辐射将由于"多普勒效应"的影响而具有显著的方向性. 辐射将集中于以速度 β 为轴线、半张角为 $\theta\simeq\frac{1}{\gamma}$ 的狭小角锥之中,电子能量 γ 越大,角锥越小.

2. 由于电子是在磁场中被加速,速度将与加速度垂直,$\beta\perp\dot{\beta}$,所以具体的辐射角分布图形应由(1.18)式给出.

4.2.4 同步辐射的谱分布(圆轨道情形)

求谱分布之前,先列出一些有关的数学公式. 贝塞尔方程是

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}+\left(1-\frac{P^2}{x^2}\right)f=0.$$

此方程当 $P\geqslant0$ 时,在 $x=0$ 处为有限的解是第一类贝塞尔函数

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2K}}{K!\Gamma(P+K+1)}.$$

因为方程中出现的是 P^2，故 $J_{-p}(x)$ 也是方程的解. 自然，$J_p(x)$和$J_{-p}(x)$的线性组合也是解. 由此定义了第二类贝塞尔函数，又叫诺埃曼函数

$$N_p(x) = \frac{J_p(x)\cos P\pi - J_{-p}(x)}{\sin P\pi}.$$

第三类贝塞尔函数—— 汉克尔函数由下式定义：

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x),$$

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x),$$

它们以及它们的线性组合都是方程的解.

当这些函数的自变量是虚数时，将采用修正的贝塞尔函数的名称. n 为整数时，修正的贝塞尔函数由下式定义：

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix).$$

现在求同步辐射谱，为简单起见，仍先考虑电子的圆周运动，谱公式的推导过程显然和求回旋辐射谱相同，都是从(1.35)式出发. 结果当然是相同的公式，即沿单位立体角、频率为 $S\nu_0$($S=1,2,3,\cdots,\nu_0=\frac{1}{2\pi}\frac{eB}{\gamma m_0 c}=\frac{1}{\gamma}\nu_L$)的辐射功率为

$$\frac{dP_S}{d\Omega} = \frac{2\pi e^2 S^2 \nu_0^2}{c}[\cot^2\theta J_S^2(S\beta\sin\theta) + \beta^2 J_S'^2(S\beta\sin\theta)], \quad (4.9)$$

而这一单色辐射的谱功率为

$$P_S = \left(\frac{8\pi^2 e^2 \nu_0^2}{v}\right)\left\{S\beta^2 J'_{2S}(2S\beta) - S^2\gamma^{-2}\int_0^\beta J_{2S}(2Su)du\right\}, \quad (4.10)$$

式中 $\nu_0=\frac{1}{2\pi}\frac{eB}{mc}=\frac{1}{\gamma}\nu_L$，$v$ 是电子速度.

因此，与回旋辐射谱比较，虽然公式相同，只是基频

$$\nu_0 = \frac{1}{\gamma}\nu_L$$

远比回旋辐射的基频为小(由于$\gamma\gg1$). 在同步辐射情况下，相邻谱线间隔($\Delta\nu=\nu_0$)变得更小，实际上已成连续谱.

但是对于同步辐射谱，出于两方面的考虑，(4.10)式应该进一步改变形式. 首先，前面的定性讨论中已经指出，同步辐射的频率基本上集中于峰频$\nu_m\simeq\gamma^2\nu_L$及其近旁，$\nu_m\gg\nu_L\gg\nu_0$(因为$\gamma\gg1$). 这表明，(4.10)式中的正整数值S应取大数，$S\gg1$，即我们关心的是各高频成分的辐射功率，而对于大阶数S和大宗量的贝塞尔函数，有可能利用Watson和Nicolson导出的公式[可以参见Erdelyi(1953年)所著"Higher Transcendental Functions"]将(4.10)式简化，现将这些公式列在下面：

$$J_{2S}(2S\beta)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}\gamma}K_{1/3}(R),$$

$$J'_{2S}(2S\beta)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}\gamma^2}K_{2/3}(R),$$

$$\int_0^{2S\beta}J_{2S}(y)dy=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_R^{\infty}K_{1/3}(t)dt,$$

以及

$$2K_{2/3}(R)-\int_R^{\infty}K_{1/3}(t)dt=\int_R^{\infty}K_{5/3}(t)dt. \qquad (4.56)$$

式中$R=\frac{2S}{3\gamma^3}$，$K_n(x)$则代表n阶修正的贝塞尔函数.

其次，由于同步辐射的谱线间隔ν_0变得很小，并且由于$\nu_m\gg\nu_0$，因此谱线的分立性已极不明显，实际上已成为光滑连续谱. 为此，应将(4.10)式表示成单位频率间隔中的辐射功率$dP(\nu)/d\nu$，即连续谱公式.

首先将(4.56)代入到(4.10)式中，即得(注意，$\beta\simeq1$)

$$\begin{aligned}P_S&=\frac{4\pi e^2\nu_0^2S}{\sqrt{3}\gamma^2c}\int_R^{\infty}K_{5/3}(t)dt\\&=\frac{4\pi e^2\nu_0^2S}{\sqrt{3}\gamma^2c}\int_{2S/3\gamma^3}^{\infty}K_{5/3}(t)dt.\end{aligned} \qquad (4.57)$$

第二步是将上式进一步改造成连续谱的分布公式. P_S原为频

率是 $S\nu_0$ 的单色波功率，由于实际上是连续谱，因此 P_S 也就是频率在 $S\nu_0 \sim (S+1)\nu_0$ 之间的辐射功率. 因此，P_S 除以这一频率间隔 ν_0 即得单位频率间隔的辐射功率$\frac{dP(\nu)}{d\nu}$，即

$$\frac{dP(\nu)}{d\nu} = \frac{P_S}{\nu_0}.$$

将(4.57)式代入上式，同时将分立变数 S 换成 ν/ν_0，经过简化，即得

$$\frac{dP(\nu)}{d\nu} = \frac{2\pi\sqrt{3}\,e^2\nu_L}{c}\left[\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(t)dt\right](\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}) \tag{4.58}$$

式中 ν_L 即熟知的非相对论电子的拉摩频率，

$$\nu_L = \frac{1}{2\pi}\frac{eB}{m_0c},$$

而参量 ν_c 的定义为

$$\nu_c = \frac{3}{2}\nu_L\gamma^2. \tag{4.59}$$

(4.58)式即相对论电子的同步辐射谱公式，而 $K_{5/3}(t)$ 是 5/3 阶修正贝塞尔函数. 显然，谱形决定于(4.58)式中方括号内的函数，即

$$F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) = \frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(t)dt. \tag{4.60}$$

可以将 $F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)$ 叫做无量纲的同步辐射谱，其谱形如图 4.12 所示. 在$\frac{\nu}{\nu_c}\simeq 0.3$ 时，曲线达到极大值 0.918. 由极值向两侧，该函数 $F(\nu/\nu_c)$ 的渐近式为

$$F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) = \begin{cases} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\Gamma_{(1/3)}\right)\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)^{1/3} & \text{当}\frac{\nu}{\nu_c} \ll 1, \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/2} e^{-(\nu/\nu_c)} & \text{当}\frac{\nu}{\nu_c} \gg 1. \end{cases}$$

可见，在低频端，函数以$\sim\nu^{1/3}$形式随频率缓慢上升，在 $\nu\simeq$

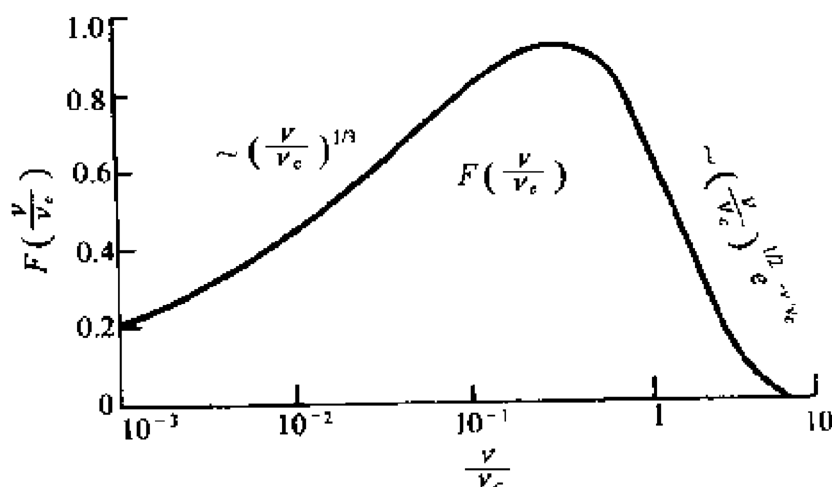


图 4.12

0.3ν_c 处达到峰值;而在高频端($\nu\gg\nu_c$),则以指数形式很陡地下降.从而也搞清了(4.59)式中频率参量 ν_c 的意义. ν_c 表示辐射的临界频率,而比 ν_c 更高频率的辐射极弱,实际上辐射截止于 ν_c. 前面定性讨论中曾指出峰值频率 $\nu_m\simeq\gamma^2\nu_L\simeq0.7\nu_c$,这实际上是粗略的估值. (4.60)式给出的峰频应为 $0.3\nu_c=0.45\gamma^2\nu_L$.

理论谱(4.60)已由实验证实. 实验工作是测量电子加速器中的辐射,磁场 $B=5\times10^4$Gs,最大电子能量为 100MeV(相当于 $\gamma=200$),其结果证实了所观测到的从 $\nu_0=\dfrac{1}{\gamma}\nu_L$ 直到 $\dfrac{3}{2}\gamma^2\nu_L=\nu_c$ 的连续谱,$\nu_0\sim10^9$/s,而 $\nu_c\sim10^{15}$/s. 辐射延伸到呈现蓝色的可见光波段.

提醒读者,图 4.12 的横轴为频率对数值. 因此,尽管同步辐射的频谱弥展在很宽的波段上. 但实际上仍保持很好的单色性,粗略地说,一个能量为 γ 的电子的同步辐射像是一条宽的单色"谱线",频率是 $\nu\simeq0.45\gamma^2\nu_L$.

4.2.5 沿螺旋轨道运动电子的同步辐射

不难由以上圆轨道电子的情况找到螺旋轨道电子($\beta_{/\!/}\neq0$)的同步辐射谱. 为此,可以首先在引导中心参考系 $\tilde{S}$ 中观察电子的辐射,该参考系相对实验室系 S 的速度是 $\beta_{/\!/}$,并且沿磁场方向. 因

此，在该参考系 $\tilde{S}$ 中，电子作圆周运动，然后通过洛伦兹变换回到实验室参考系 S. 即可得到螺旋轨道电子的谱公式. 其结果和(4.58)很相像，只要将(4.58)式中[同样，在(4.59)，(4.60)式中]出现频率 ν_L 处，都用 $\nu_L\sqrt{1-\beta_{/\!/}^2}$ 代替即可，即

$$\nu_L \to \nu_L\sqrt{1-\beta_{/\!/}^2} \tag{4.61}$$

(推导详见 Blumenthal and Gould，1970，*Rev. Mod. Phys.*，**42**，237). 这一替换也可以用电子进入磁场时的投射角 α(电子速度和磁场 $\boldsymbol{B}$ 之夹角)表示，由于

$$\beta_{/\!/}=\beta\cos\alpha,\qquad \beta\simeq 1,$$

故(4.61)式给出的替换亦可写成

$$\nu_L \to \nu_L\sqrt{1-\beta^2\cos^2\alpha}\simeq\nu_L\sin\alpha. \tag{4.61$'$}$$

最后求得螺旋轨道电子的同步辐射谱公式为

$$\begin{aligned}\frac{dP(\nu)}{d\nu}&=\frac{2\pi\sqrt{3}\,e^2\nu_L\sin\alpha}{c}\left[\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(t)dt\right]\\&=\frac{2\pi\sqrt{3}\,e^2\nu_L\sin\alpha}{c}F(\nu/\nu_c),\end{aligned} \tag{4.62}$$

或者写成

$$\frac{dP(\nu)}{d\nu}=2.3\times10^{-22}B\sin\alpha F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\qquad(\mathrm{erg\cdot s^{-1}\cdot Hz^{-1}}), \tag{4.62$'$}$$

其中临界频率为

$$\nu_c=\frac{3}{2}\gamma^2\nu_L\sin\alpha=4.3\times10^6B\gamma^2\sin\alpha. \tag{4.63}$$

从圆轨道电子的辐射公式(4.58)，(4.59)变成螺旋轨道的(4.62)和(4.63)，相当于将圆轨道公式中的磁场强度 B 用 $\boldsymbol{B}$ 在电子速度的垂直方向分量 $B_\perp=B\sin\alpha$ 来替换，$B_\perp$ 是引起电子加速的有效磁场.

由(4.62)，(4.63)式可见，螺旋轨道电子的同步辐射谱的形状和圆轨道电子谱相似，只是临界频率 ν_c 有改变.

除了临界频率的改变，螺旋轨道电子辐射还有一个特点，即观测者收到的辐射脉冲周期 $\tau_{观}$ 小于电子原来发射的周期 τ. 对于以投射角 α 作螺旋轨道运动的电子，由于同步辐射很强的方向性，因此只有当远处观测者的方向 $\theta\simeq\alpha$ 时 $\left[\theta=\alpha+0\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right]$，才有可能收到辐射，此时电子在观测方向具有速度为(见图 4.13).

$$c\beta_{/\!/}\cos\alpha = c\beta\cos^2\alpha.$$

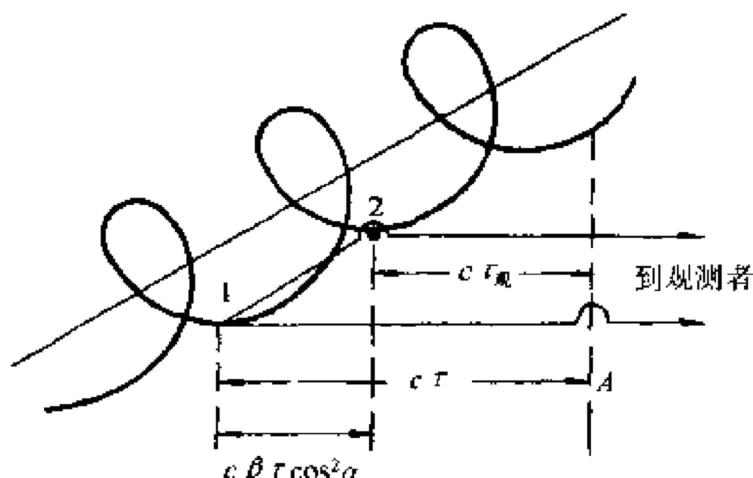


图 4.13

因此，电子在相邻两次脉冲发射时间间隔 τ(即脉冲周期)中，向观测者方向前进了一段距离 $c\beta\tau\cos^2\alpha$，从图中位置 1 到达 2. 在时间 τ 中，电子在位置 1 发出的脉冲传播了距离 $c\tau$，到达 A 点，而下一个脉冲则恰好在位置 2 发出，两个相邻脉冲的距离为

$$c\tau - c\beta\tau\cos^2\alpha \simeq c\tau\sin^2\alpha.$$

把观测脉冲周期记为 $\tau_{观}$，则相邻两脉冲的距离为 $c\tau_{观}$，显然有

$$c\tau_{观} = c\tau\sin^2\alpha,$$

即

$$\tau_{观} = \tau\sin^2\alpha < \tau \tag{4.64}$$

考虑到能量守恒关系，即每周期中电子辐射的总能量 $P\cdot\tau$ 必须等于观测者一周期中收到的总能量 $P_{观}\cdot\tau_{观}$，所以有

$$P_{观} = \frac{P\cdot\tau}{\tau_{观}} = \frac{P}{\sin^2\alpha}, \tag{4.65}$$

即观测的总功率将大于(4.50)给出的辐射功率一个因子$\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

需要指出,上面导出的螺旋轨道电子的谱公式只在投射角$\alpha\gg\frac{1}{\gamma}$的条件下才成立. 对于极端相对论电子($\gamma\gg1$),除了一些很小的立体角范围,这一条件都是满足的. 因此,对于具有各向同性分布的电子而言,用(4.62)计算辐射谱是很好的近似,因为具有小的α角的电子只占极小比例;但在有些情况中,会有足够比例的电子具有小的α角,使$\alpha\lesssim\frac{1}{\gamma}$,那就不能再用(4.62)式计算谱形了. 这一情况是有可能出现的;例如,当粒子先沿磁场方向受到某种机制引起的加速,或者在粒子由于辐射损耗能量以后α角逐渐减小(因为功率$P\propto\sin^2\alpha$). 当电子投射角$\alpha\lesssim\frac{1}{\gamma}$时,则在$\beta_{/\!/}=0$的参考系中,粒子是非相对论的. 因此,在这个参考系(即引导中心系)中粒子产生单色的回旋辐射,辐射频率即回转频率,且具有非相对论电子偶极辐射的角分布花样. 利用得到(4.62)式的相同办法,即通过洛伦兹变换,可以求出在实验室系中电子(作螺旋轨道运动)的辐射谱功率. 这里只将结果列出.

$$\frac{dP(\nu)}{d\nu}=\begin{cases}(2\pi^2e^2\alpha^2\nu/c)\left[1-\left(\frac{\nu}{\gamma\nu_L}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\gamma\nu_L}\right)^2\right] \\ \qquad\qquad \text{当}\frac{\nu_L}{\gamma}\ll\nu\ll2\gamma\nu_L, \\ 0 \qquad\qquad \text{当}\nu>2\gamma\nu_L.\end{cases} \tag{4.66}$$

注意,由(4.66)可见,峰值频率为$2\gamma\nu_L$,它比大α角情况下的临界频率ν_c[见(4.63)式]小γ^{-1}倍.

4.2.6 同步辐射的偏振特性

为了说明同步辐射的偏振,必须将电矢$\boldsymbol{E}$沿两个与辐射方向$\boldsymbol{k}$垂直的,并且彼此互相垂直的方向$\boldsymbol{l}_1$,$\boldsymbol{l}_2$分解. $\boldsymbol{l}_2$规定为方向垂直于磁场$\boldsymbol{B}$及传播方向$\boldsymbol{k}$的单位矢,而$\boldsymbol{l}_1$为垂直于$\boldsymbol{l}_2$和传播方向$\boldsymbol{k}$的单位矢(见图4.14). $\boldsymbol{l}_1$也就是磁场$\boldsymbol{B}$在垂直于波传播方向$\boldsymbol{k}$的

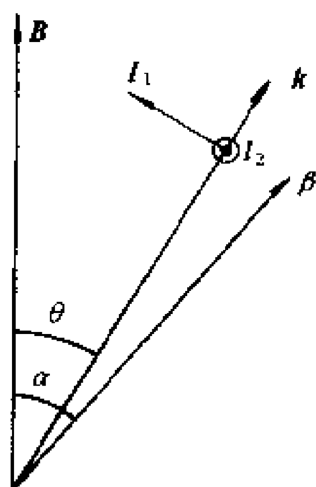


图 4.14

平面上的投影方向. 电矢 $\boldsymbol{E}=E_1\boldsymbol{l}_1+E_2\boldsymbol{l}_2$. 由于同步辐射有很强的方向性，所以对于一个投射角是 α 而速度为 $\boldsymbol{\beta}$ 的电子，它有着显著辐射的方向 $\boldsymbol{k}$（$\boldsymbol{k}$ 的方向在图中用 θ 表示）与电子的瞬时速度方向 $\boldsymbol{\beta}$（图中用 α 角标志）几乎是一致的，$\theta\simeq\alpha$. 我们将用 $\psi=\theta-\alpha$ 表示辐射方向和速度方向间的微小差异. 第一章定性分析中已指出，ψ 的量级约为 γ^{-1}，即 $\psi\lesssim 1/\gamma$. 理论计算证明（这里仅列出结果，对此有兴趣的读者可以参考 A.G. 帕考尔楚克著《射电天体物理学》一书，那里有详细推导，或者参考文献 *Ap. J.*, **130**, 241—258, 1959），沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的同步辐射，其电矢 $\boldsymbol{E}$ 的两个分量 E_1 和 E_2 正好有 $\pi/2$ 的相位差，这说明同步辐射是椭圆偏振波，偏振椭圆的短轴与 $\boldsymbol{l}_1$ 平行，长轴则与 $\boldsymbol{l}_2$ 平行，其椭率 b 由下式给出：

$$\operatorname{tg} b=\frac{E_1}{E_2}=\psi\frac{\gamma K_{1/3}(y)}{\sqrt{1+\gamma^2\psi^2}K_{2/3}(y)}, \tag{4.67}$$

式中 $\psi=\theta-\alpha$ 是一个小量，$\psi\lesssim\frac{1}{\gamma}$，宗量

$$y=\frac{\nu}{2\nu_c}(1+\gamma^2\psi^2)^{3/2}, \qquad \nu_c=\frac{3}{2}\gamma^2\nu_L\sin\alpha$$

[见(4.63)式]. 按(4.67)式，椭圆偏振光是左旋抑或右旋，由 ψ 的正负号决定. 由于 $\psi\lesssim\frac{1}{\gamma}$ 是很小的数，故有 $E_1\ll E_2$；特别当 $\psi=\theta-\alpha=0$ 时，即电子速度恰好指向观测者，$E_1=0$，辐射将成为线偏振.

这里指出，虽然对于给定的 γ,α 的电子，其辐射的偏振状态非常敏感地依赖于 $\psi=\theta-\alpha$，情况似乎很复杂，但好在观测者收到的是大量电子的集体辐射，要考虑各种投射角 α 的电子的贡献（自然，这些 α 角都极接近于辐射方向角 θ，$\alpha\simeq\theta$）. 只要电子速度分布

在 ψ 角变化的小范围 $\sim 1/\gamma$ 中是均匀的，那么可以预期负的 ψ 的贡献将抵消正的 ψ 贡献，因而电子集体的同步辐射的偏振椭率为零. 于是，可以仅考虑辐射的线偏振情况.

首先计算一个"能量"是 γ，投射角是 α 的电子的线偏振度. 用 $dP^{(1)}(\nu)/d\nu$，$dP^{(2)}(\nu)/d\nu$ 分别表示偏振方向沿 l_1 和 l_2 的谱功率，这里的 $dP^{(i)}(\nu)/d\nu$ 是该电子在辐射角范围 $\psi\sim\left(-\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\gamma}\right)$ 中的积分值，计算得到（详见参考文献[16]）

$$\begin{aligned}\frac{dP^{(1)}(\nu)}{d\nu}&=\frac{\pi\sqrt{3}\,e^2\nu_L\sin\alpha}{c}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\\&\quad\cdot\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(t)dt-K_{2/3}(\nu/\nu_c)\right],\\\frac{dP^{(2)}(\nu)}{d\nu}&=\frac{\pi\sqrt{3}\,e^2\nu_L\sin\alpha}{c}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\\&\quad\cdot\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(t)dt+K_{2/3}(\nu/\nu_c)\right],\end{aligned}\tag{4.68}$$

式中

$$\nu_c=\frac{3}{2}\gamma^2\nu_L\sin\alpha.$$

注意，将以上两式求和，得到的总功率 $dP(\nu)/d\nu$ 恰与(4.62)式相合.

该电子辐射的线偏振度定义为

$$\Pi\equiv\frac{\dfrac{dP^{(1)}(\nu)}{d\nu}-\dfrac{dP^{(2)}(\nu)}{d\nu}}{\dfrac{dP^{(1)}(\nu)}{d\nu}+\dfrac{dP^{(2)}(\nu)}{d\nu}}=\frac{\dfrac{dP^{(1)}(\nu)}{d\nu}-\dfrac{dP^{(2)}(\nu)}{d\nu}}{\dfrac{dP(\nu)}{d\nu}}.\tag{4.69}$$

把(4.68)式代入(4.69)式，得到该电子的线偏振度为

$$\Pi=\frac{K_{2/3}(\nu/\nu_c)}{\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(t)dt}.\tag{4.70}$$

图 4.15 给出单个电子的线偏振度 Π 随频率的变化曲线. 因为修正的贝塞尔函数 $K_n(x)$ 的渐近表达式为

$$K_n(x) \simeq \Gamma(n)\left(\frac{2}{x}\right)^n/2, \text{当} x \ll 1;$$

$$K_n(x) \simeq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}, \text{当} x \gg 1.$$

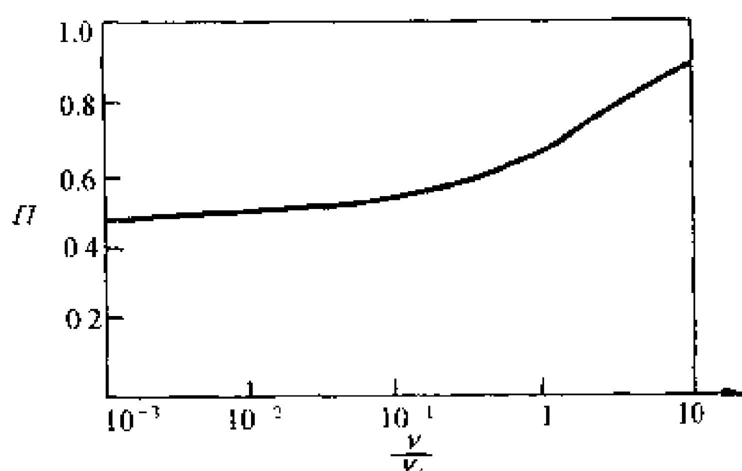


图 4.15

由此可见，在 $\nu \ll \nu_c$ 的低频端，$\Pi \to \frac{1}{2}$；而在 $\nu \gg \nu_c$ 的高频端，Π 接近于 1.

4.2.7 电子系集体的同步辐射

上面说的是单个电子的同步辐射性质，而天文观测中的辐射总是大量电子的集体效应. 假定在等离子体中某一点处，单位体积中能量为 γ—$\gamma+d\gamma$，投射角 α—$\alpha+d\alpha$ 中的相对论电子数为 $N(\gamma、\alpha、t)d\gamma d\Omega_\alpha$，此处的 $d\Omega_\alpha = 2\pi\sin\alpha d\alpha$，则不难由每个电子的谱功率 (4.62) 式算出单位体积中电子的总辐射谱功率 $j(\nu)$（又叫谱发射率）：

$$j(\nu) = \int N(\gamma、\alpha、t) d\gamma d\Omega_\alpha \frac{dP(\nu)}{d\nu}, \tag{4.71}$$

这里假定了各个电子的辐射是不相干的.

在天体物理学的许多情况下，常常认为在某一能量 $\gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_2$ 中，电子能量分布具有幂律形状，而且是稳定的，即

$$N(\gamma、\alpha) = N_\gamma \cdot \gamma^{-n} g(\alpha)/4\pi \tag{4.72}$$

(事实上,宇宙线中粒子能谱就具有幂律形式).

如果电子投射角 α 具有各向同性分布,则有 $g(\alpha)=1$. 将单个电子的谱功率(4.62)及(4.72)一并代入(4.71)式,即可得到谱发射功率为

$$j(\nu)=\frac{1}{2}N_\gamma\left(\frac{\sqrt{3}e^2}{2c}\right)\nu_L\left(\frac{2\nu}{3\nu_L}\right)^{(1-n)/2}$$
$$\cdot H(n)[G(x_2)-G(x_1)]. \qquad (4.73)$$

此处 $x\equiv\nu/\nu_c$,而

$$H(n)=\int(\sin\alpha)^{(1+n)/2}g(\alpha)d\Omega_\alpha$$
$$=2\pi\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+5}{4}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+7}{4}\right),$$
$$G(x_1)=\int_{x_1}^{\infty}x^{(n-1)/2}\int_x^{\infty}K_{5/3}(y)dydx.$$

请读者自己导出(4.73)式. 只需注意,最好是先对 γ 积分,再对 α 角积分. 其次,在对能量 γ 积分时,最好做积分变量替换,$\gamma\to x\equiv\nu/\nu_c=\nu/(\frac{3}{2}\gamma^2\nu_L\sin\alpha)$.

$G(x)$ 具有以下极限性质:

$$G(\infty)=0,$$
$$G(0)=2^{(n-3)/2}\frac{3n+7}{3(n+1)}\Gamma\left(\frac{3n-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3n+7}{12}\right),$$

式中 $\Gamma(x)$ 即伽玛函数.

当 $x_2\ll x\ll x_1$ 时,$G(x_2)-G(x_1)$ 与 $\simeq G(0)-G(\infty)=G(0)$ 频率无关,从而由(4.73)式可见,

$$j(\nu)\propto\nu^{(1-n)/2};$$

这表明,由于电子能量分布具有幂律形式(4.72),就使得谱发射率(即单位体积中电子的总的谱功率)随频率的变化也具有幂律形式. 幂指数常记为 $-q$,简称谱指数,$j(\nu)\propto\nu^{-q}$. 因此,谱指数 q 和电子能谱指数 n 之间的关系为

$$n=2q+1, \qquad (4.74)$$

可见 $n>q$，即能谱比辐射谱更陡.

将 $H(n)$ 和 $G(0)$，$G(\infty)$ 值代入(4.73)式，最后得到

$$j(\nu)=(1.35\times10^{-22})a(n)N_{\gamma}B^{\frac{n+1}{2}}(4.20\times10^{6})^{\frac{n-1}{2}}\cdot\nu^{-\frac{n-1}{2}},\tag{4.75}$$

式中

$$a(n)=2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3n-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3n+7}{12}\right)\Gamma\left(\frac{n+5}{4}\right)\cdot(3n+7)/8\sqrt{3}\,(n+1)\Gamma\left(\frac{n+7}{4}\right)$$

$j(\nu)$ 的单位是 erg/(cm^3·s·sr·Hz).

对于不同的能谱指数，计算的 $a_{(n)}$ 值为

$n=$	1	1.5	2	2.5	3	4
$a(n)=$	0.283	0.147	0.103	0.0852	0.0742	0.0725

电子的幂律能谱产生幂律的同步辐射谱，并且能谱比辐射谱更陡. 这不难作出物理解释. 一个"能量"γ 的电子的同步辐射可看成单色辐射(准单色近似)，频率近似为

$$0.3\nu_c=0.45\gamma^2\nu_L\propto\gamma^2,$$

即高能电子产生高频辐射时，近似地有"能量"γ 和频率 ν 的一一对应. 因此，自然会有幂律电子能谱产生幂律辐射谱的情况. 另一方面，注意同步辐射功率 $P\propto\gamma^2$，即高能电子有更强的辐射，所以具有陡的幂律能谱分布的电子系；尽管 γ 值大的高能电子数下降很快，但它们产生的辐射较强，辐射随频率增大而较为平缓地下降.

根据(4.58)和(4.60)式不难推知，当 $\nu\gg\gamma_2^2\nu_L$，即辐射频率显著超过最高能量电子的峰频时，同步辐射谱应当以指数形式随频率迅速下降.

目前在许多射电星系、类星体及其他活动星系核中，的确发现了具有幂律形式的非热辐射谱，谱指数各不相同，一般在 0.3—2 之间，平均约为 0.7. 现在普遍地认为，这一幂律谱形是电子的同步辐射机制所产生的. 幂律谱形表明，辐射源中电子的能谱也具有

幂律形式；陡谱表明，电子的能谱指数 n 也较大；平谱表明 n 较小. 考虑到电子作同步辐射时，能量 γ 会逐渐衰减，越是高能值 γ 的电子能量减少越快，因此可以预料，随着辐射时间的推移，势必高能电子迅速减少，而低能量电子逐渐堆积. 这相当于能谱指数 n 会随时间逐渐加大，能谱变陡.

认为同步辐射是这类天体非热辐射的主要机制的另一个有力证据是偏振特性. 现已在许多射电源和光学源中观测到辐射是偏振的，而同步辐射有别于其他一些辐射机制(例如轫致辐射、黑体辐射、康普顿辐射等)的最主要特点之一，正是辐射具有偏振特性.

对于给定的电子能谱分布，可以求出电子集体的同步辐射的平均线偏振度. 注意，(4.70)式给出的只是能量为 γ 的单个电子的辐射偏振度，因此不能直接搬用. 利用(4.68)式和积分(4.71)式，可以分别求出两个偏振方向的谱发射率 $j_1(\nu)$ 和 $j_2(\nu)$，而平均线偏振度现定义为

$$\Pi = \frac{j_2(\nu) - j_1(\nu)}{j_2(\nu) + j_1(\nu)};$$

对于电子的幂律能谱(4.72)式，可以求出 Π 为

$$\Pi = \frac{n+1}{n+7/3}, \tag{4.76}$$

可见 Π 和频率无关，(4.76)式的适用范围是

$$\nu_c(\gamma_1) \leqslant \nu \leqslant \nu_c(\gamma_2).$$

应当指出，实际观测的偏振常常低于(4.76)给出的值，一般认为这是由于磁场不均匀及法拉第旋光效应造成的(由于法拉第效应对不同频率 ν 的辐射，偏振面的旋转角不同，而接收器不是严格单色的，具有不同旋转角的各种单色波混杂结果，致使线偏振度减少). 关于法拉第效应的详细讨论，读者可在第一章中找到.

4.2.8 对宇宙射电源的辐射谱的进一步讨论

实际观测到的射电谱，常常不是简单的幂律谱. 图 4.16 给出观测到的四种典型的射电谱型，由曲线 a，b，c，d 表征. 图中纵坐标

是对数流量 $\lg F(\nu)$，横坐标是对数频率. 谱型 a 是一条直线，即典型的幂律谱形式 $F(\nu)\sim\nu^{-q}$. 它表示源的谱发射率 $j(\nu)\sim\nu^{-q}$. 谱型 b 的特点是存在一个"拐点"，把曲线分成高频段和低频段. 两段分别具有幂律形式，但有不同的幂指数 q. 谱型 c 的特点是曲线在低频部分又开始下降，即流量 $F(\nu)$ 在低频显著减小.

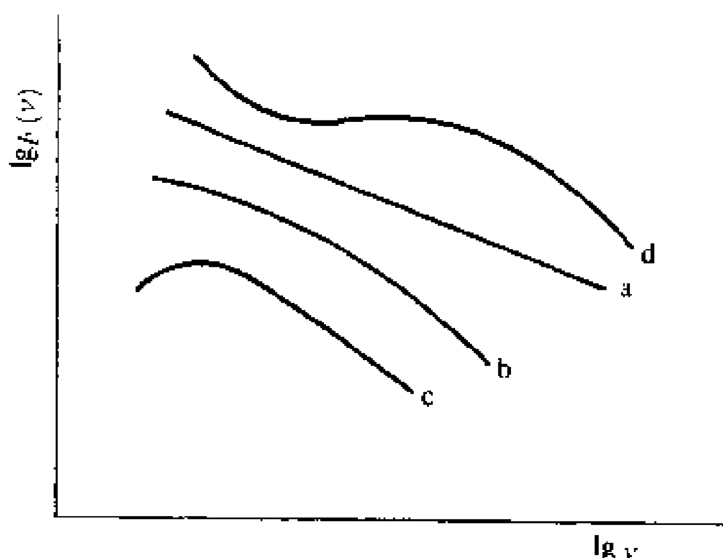


图 4.16

产生这四类谱型的原因还没有最后的定论（特别是关于谱型 d）. 关于谱型 a，一般认为是由于源中电子能谱分布为稳定的幂律形式，即 $N(\gamma,t)=N_0\gamma^{-n}$，造成了幂律形式的发射谱，谱指数

$$q=\frac{1}{2}(n-1)$$

[见(4.74)式]. 这在上一节已详细讨论过. 而谱型 b 的成因，一般认为是由于辐射损耗造成的电子能谱改变所致. 相对论电子能量的辐射损失大小因不同的辐射机制而异. 对于同步辐射，由(4.51)给出的总功率公式不难求得电子的能量损失率为

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{sy}=-3\times10^{-8}\gamma^2U_{mag}, \tag{4.77}$$

式中 $U_{mag}=\frac{B^2}{8\pi}$ 表示磁场的能密度.

在第五章中将要讨论相对论电子的康普顿辐射，并且给出由

于康普顿辐射造成的能量损失为

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_c = -3\times 10^{-8}\gamma^2 U_{ph}, \tag{4.78}$$

其中 U_{ph} 代表辐射场中的光子能量密度.

这是两种基本的辐射损耗. 此外, 假如辐射源体积是膨胀的, 电子由于绝热膨胀过程而损失的能量是

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{EX} = -\gamma\frac{V}{R} = -\frac{\gamma}{t}, \tag{4.79}$$

式中 V 是源的膨胀速度, R 是源的半径, 式中第二等式只对匀速膨胀的源适用.

当然, 除了电子能量的损失过程之外, 在讨论电子能谱变化时, 还必须考虑源中产生相对论电子的加速过程. 源中电子加速到相对论速度的机制还不十分清楚. 对脉冲星的研究表明, 大尺度的电磁场可以完成这种加速(例如, 见 Rudermann, 1972), 也可以由于等离子体湍流造成加速(Tsytovich, 1973), 激波加速, 以及其他一些考虑. 但在讨论能谱变化问题时, 可以不涉及加速的具体机制, 只形式地引进一个量 $Q(\gamma,t)$. $Q(\gamma,t)d\gamma$ 代表相对论电子的源或漏, 即单位时间注入单位体积中的"能量"为 γ—$\gamma+d\gamma$ 的电子数. 同时考虑了电子能量损失和电子加速过程, 就可能找到电子能谱的变化. 用 $N(\gamma,t)d\gamma$ 表示源内单位体积中在 t 时刻的"能量"在 γ—$\gamma+d\gamma$ 范围的相对论电子数, 则电子能谱随时间的变化应由下列"能量空间"中的"连续性方程"决定:

$$\frac{\partial N(\gamma,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\gamma}(\dot{\gamma}N(\gamma,t)) = Q(\gamma,t). \tag{4.80}$$

现在就两个情况求能谱 $N(\gamma,t)$ 随时间的变化关系.

1. 有连续注入的情况. 此时 $Q(\gamma,t)\neq 0$, 能够不断补偿辐射损失造成的 $N(\gamma,t)$ 的变化. 如果相对论电子以幂律形式注入, $Q(\gamma, t) = Q_s\gamma^{-n}$, 在这样的情况下, 若无辐射损失, 则能谱 $N(\gamma,t)$ 应当有和 $Q(\gamma,t)$ 相同的幂律形式, 幂指数 n 也相同. 但由于实际上存在着辐射损失, 按照(4.50)式、(4.51)式可知, 损失率 $\dot{\gamma}\propto -\gamma^2$, 即不同"能量" γ 的电子有不同损失率. 结果使能谱 $N(\gamma,t)$ 不能维持

在 γ^{-n}形式上而要发生变化. 最后，当注入 $Q(\gamma,t)$ 与损耗达到动态平衡时，能谱成为稳定分布，不再随时间变化，$\frac{\partial N(\gamma,t)}{\partial t}=0$.

若要求出有损失情况下的能谱分布，则须解方程(4.80)式. 在稳定情况下，$\frac{\partial N(\gamma,t)}{\partial t}=0$，得到

$$\frac{\partial}{\partial \gamma}(\dot{\gamma}N(\gamma,t)) = Q(\gamma),$$

故得

$$N(\gamma) = \dot{\gamma}^{-1}\int_{\gamma}^{\infty}Q(\gamma')d\gamma',$$

或

$$N(\gamma) = -Q_i\gamma^{1-n}/\dot{\gamma}(n-1).$$

由于辐射损失 $\dot{\gamma}\propto-\gamma^2$，故

$$N(\gamma) \propto \gamma^{-(1+n)}. \tag{4.81}$$

由(4.81)式可见，在稳定的连续注入下，考虑到辐射损失 $\dot{\gamma}\propto-\gamma^2$，能谱 $N(\gamma)$仍有幂律形式，但幂指数不再是 n.

总之，在稳定的连续注入下，如果没有辐射损失，则能谱具有与注入 $Q(\gamma)$ 相同的幂律形式，$N(\gamma)\propto\gamma^{-n}$；如果不能忽略辐射损失，则能谱形式成为 $N(\gamma)\propto\gamma^{-(1+n)}$，能谱变陡.

判别一个能量为 γ 的电子的辐射损失是否可以忽略，只需将其辐射寿命 $t_{sy}(\gamma)$ 与辐射源的年龄作比较即可. 当辐射寿命 $t_{sy}(\gamma)$ 远小于源的年龄 t，$t_{sy}(\gamma)\ll t$，则表示辐射损失必须考虑；而当 $t_{sy}(\gamma)\gg t$时，则表明辐射损失没有起显著作用，可以忽略不计. 由于寿命 $t_{sy}(\gamma)$ 明显地和电子能量 γ 有关[见(4.53)式]，因此对于给定年龄的辐射源，有可能在 γ 值小的低能范围中满足 $t_{sy}(\gamma)\gg t$，而同时在 γ 值大的高能范围中有 $t_{sy}(\gamma)\ll t$. 因此，在稳定的连续注入 $Q(\gamma)=Q_i\gamma^{-n}$下，应该将电子能谱分成两段分别考虑：在"高能段"，$t_{sy}\ll t$，辐射损失大($\dot{\gamma}\propto\gamma^2$)，因此能谱为 $N(\gamma)\sim\gamma^{-(1+n)}$；在"低能段"，$t_{sy}\gg t$，略去辐射损失，能谱为 $N(\gamma)\sim\gamma^{-n}$.

知道了能谱分布 $N(\gamma)$，就可以解释谱型 b 的可能成因. 由于

高能值的相对论电子产生高频部分的同步辐射，低能值电子产生低频段辐射，按照(4.74)式和(4.75)式，电子的幂律形能谱产生幂律形辐射谱，谱指数 q 与能谱指数 n 的关系是 $q=\frac{1}{2}(n-1)$. 因此，辐射谱也应分成高频段和低频段. 高频段对应于高能电子的辐射，应有 $F(\nu)\sim\nu^{-q}=\nu^{-\frac{n}{2}}$，即谱指数 $q=\frac{n}{2}$；低频段对应于低能段电子，应有 $F(\nu)\sim\nu^{-q}=\nu^{-\frac{1}{2}(n-1)}$，即 $q=\frac{1}{2}(n-1)$. 这就说明了谱型 b 的特征：频谱分成两段，都具有幂律形式，但高频段变陡，谱指数 q 比低频大 1/2.

按照这种解释，还可以找到谱型 b 的分界点的位置. 具有不同指数的幂律谱的分界点的位置可以用电子能值 γ_b 或者相应的辐射频率 ν_b 表征. γ_b 或者 ν_b 应由条件 $t_{sy}\simeq t$ 定出. 根据(4.54)式给出的寿命公式，即有

$$t_{sy}(\gamma)=\frac{8.7\times10^{11}}{B^{3/2}\cdot\sin^{3/2}\alpha\cdot\nu_m^{1/2}}(\mathrm{s})=t, \tag{4.82}$$

式中 ν_m 是能量为 γ 的电子的辐射峰频，$\nu_m\simeq\gamma^2\nu_L$ 是 γ 的函数. 由(4.82)式即可由年龄 t 定出分界点 γ_b，或直接定出分界点频率 $\nu_b\equiv\nu_m$，即

$$\nu_b=\frac{10^{24}}{B_\perp^3\cdot t^2}(\mathrm{s}^{-1}), \tag{4.83}$$

式中 $B_\perp=B\sin\alpha$ 是垂直于电子速度的磁场分量. 由(4.83)可见，随辐射源年龄 t 的增长，ν_b 很快下降，谱型 b 的拐点位置移向低频端.

2. 另一种极端情况的注入方式. 假定初始时有一脉冲式的幂律形式注入，$Q(\gamma_0)=Q_t\gamma_0^{-n}$，此后 $Q(\gamma_0)=0$. 在此情况下，$t=0$ 时刻的能谱分布为

$$N(\gamma_0)d\gamma_0=N_0\gamma_0^{-n}d\gamma_0,$$

即 $N(\gamma_0)$ 和注入 $Q(\gamma_0)$ 有相同的幂律形式. 标有脚标的值 γ_0 表示注入刚停止时刻电子的能量值.

由于辐射损耗，能谱将逐渐偏离 γ^{-n} 形式. 把辐射损失简单记为 $\dot{\gamma}=-b\gamma^2$，$b=3\times10^{-8}U_{mag}$[见(4.77)式]，则有

$$\gamma=\frac{\gamma_0}{1+b\gamma_0 t},\qquad \gamma_0=\frac{\gamma}{1-b\gamma t},$$

因此

$$d\gamma_0=\frac{d\gamma}{(1-b\gamma t)^2}.$$

由于辐射损失，$t=0$ 时刻处在 $\gamma_0-\gamma_0+d\gamma_0$ 中的电子在 t 时刻会进入 $\gamma-\gamma+d\gamma$ 间隔之中，即

$$N(\gamma_0)d\gamma_0=N(\gamma,t)d\gamma,$$

所以有

$$\begin{aligned}N(\gamma,t)d\gamma&=N_0\gamma_0^{-n}d\gamma_0\\&=\begin{cases}N_0\gamma^{-n}(1-b\gamma t)^{n-2}d\gamma, & \gamma_1<\gamma<\gamma_2;\\0, & \gamma>\gamma_2\ \text{或}\ \gamma<\gamma_1.\end{cases}\end{aligned}\tag{4.84}$$

(4.84)表明，t 时刻 $N(\gamma,t)$ 已偏离了 γ^{-n} 的幂律形式，在 $\gamma_1<\gamma<\gamma_2$ 范围内，多了一个关于 γ^{-n} 形式的修正因子 $(1-b\gamma t)^{n-2}$；对于较高的能值 γ，或者对于较长的演化年龄 t，这一修正因子偏离 1 越大，即与幂律谱 γ^{-n} 偏离越远. 这一注入机制同样能够说明谱型 b 中高频部分变陡的事实，但似乎不存在明显的拐点；从低频到高频段，辐射曲线是连续变陡的.

以上是关于谱型 a，b 的解释. 对于在低频部分出现极大值的谱型 c，主要点是要说明低频端流量 $F(\nu)$ 下降的原因，现将已有的一些解释简单列在下面：

1. 同步辐射自吸收. 对致密的光学厚的辐射源，必须考虑同步辐射的自吸收效应(见下一节). 自吸收系数 k_ν 随频率 ν 的下降而增大，使低频段光深 $\tau(\nu)$ 变大，流量 $F(\nu)$ 下降.

2. 射电波段中，等离子体的自由-自由吸收效应同样应予重视，特别是对于光学厚致密源更应如此. 这种吸收由公式

$$k_\nu\simeq\frac{10^{-2}N_e^2}{T_e^{3/2}}\left[17.7+\ln\frac{T_e^{3/2}}{\nu}\right]\frac{1}{\nu^2}$$

给出，式中 T_e，N_e 分别是热电子气的温度和密度. 可见，当频率减小时，吸收增大，与同步自吸收的性质相似.

3. 回旋辐射的倒转效应. 曾经指出，如果相对论电子在 $\gamma_1<\gamma<\gamma_2$ 范围中具有幂律能谱，$N(\gamma)\sim\gamma^{-n}$，则辐射谱也是幂律形式，即 $F(\nu)\sim\nu^{-q}=\nu^{-\frac{n-1}{2}}$，但这只是对频率在 $\gamma_1^2\nu_L\leqslant\nu\leqslant\gamma_2^2\nu_L$ 范围才适用. 因为引出单个电子同步辐射谱(4.58)和(4.60)式时已指出，对于 $\gamma\gg1$ 的极相对论电子，辐射的单色性实际上很好，主要辐射频率 $\nu_m\simeq\gamma^2\nu_L\simeq\nu_c$. 这种准单色性给出电子的洛伦兹因子 γ(代表电子能量)与辐射频率 ν 之间有近似的一一对应，这就不难了解为何幂律形电子能谱就能给出幂律形的辐射谱. 对于频率高于最大能量电子的主要辐射频率，$\nu\geqslant\gamma_2^2\nu_L$，或者低于最小能量电子的辐射频率，$\nu\leqslant\gamma_1^2\nu_L$ 的频段，显然不能再保持幂律形的辐射谱了；即使是对于忽略吸收的光学薄介质，情况也将如此.

现在的问题是，对于 $\nu\ll\gamma_1^2\nu_L$ 的低频端，辐射谱形 $F(\nu)$ 应有什么形状？可以从理论上证明：当频率很低，使 $\nu<\nu_L$ 时，流 $F(\nu)\sim\nu^n$，n 是电子能谱指数. 可以很简单地导出这一谱形. 本章一开始的定性分析中已经说过，一个能量为 γ 的电子，其同步辐射的频谱范围是 ν_L/γ—$\gamma^2\nu_L$. 低频截止恰为电子回转频率 ν_L/γ. 由此可见，不仅高频端的辐射，而且低频端的辐射也是由 γ 值大的高能电子所贡献. 特别对 $\nu\ll\nu_L$ 的低频部分，辐射流量 $F(\nu)$ 应是 γ 值大的电子所产生的. 对于给定的低频值 ν 的辐射，按照基频公式 $\nu=\frac{\nu_L}{\gamma}$，只需考虑所有 $\gamma\geqslant\frac{\nu_L}{\nu}$ 的高能电子对该频率的贡献. 根据(4.62)给出的单电子谱功率 $\frac{dP(\nu)}{d\nu}$ 和(4.71)给出的谱发射率 $j(\nu)$，应有

$$
\begin{aligned}
j(\nu) &= \int_{\nu_L/\nu}^{\infty}\frac{dP(\nu)}{d\nu}N(\gamma)d\gamma \\
&\propto \int_{\nu_L/\nu}^{\infty}\gamma^{-n}d\gamma\cdot F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right).
\end{aligned}
$$

再注意当 $\nu\ll\nu_c$ 的低频极限下，

$$F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) \propto \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3} \propto \nu^{\frac{1}{3}} \cdot \gamma^{-\frac{2}{3}} \nu_L^{-\frac{1}{3}},$$

故有

$$j(\nu) \propto \int_{\nu_{L/\nu}}^{\infty} \gamma^{-n-\frac{2}{3}} \nu^{\frac{1}{3}} \cdot d\gamma \propto \nu^{n}. \qquad (4.85)$$

(4.85)式说明，辐射谱在低频端会随频率的减小而下降. 将(4.74)式与(4.85)式联系起来看，辐射谱形是这样的：在低频部分，即 $\nu \ll \nu_L$ 时，辐射谱形式为 $F(\nu) \propto \nu^{n}$；而在高频端，即 $\nu \gg \nu_L$ 时，谱形为 $F(\nu) \propto \nu^{-\frac{n-1}{2}}$. 谱形出现极大值，转变点大约出现于 $\nu \simeq \nu_L$ 处. 这种对谱型 c 成因的解释常称为回旋辐射(低频辐射)的倒转效应.

4. 拉金效应(Razin effect). 对于完全电离的等离子体，其折射率为

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1,$$

其中 ω_p 为等离子体振荡频率(这一公式可在任何一本等离子体物理学的书中找到). 因此，其中电磁波的相速 u 将大于真空光速，$u > c$. 结果，尽管相对论电子速度 $v \simeq c$，但仍可能小于等离子体中电磁波的相速 $u\left(u = \frac{c}{n} > c\right)$，从而使辐射的相对论性的增强和聚束作用(即辐射的很强的方向性)下降，相对论电子在等离子体中的行为反类似于真空中的非相对论电子，使辐射剧烈减弱. 特别是对 $\omega \gtrsim \omega_p$ 的低频部分，相速 $u \gg c > v$，这一效应最为明显. 这也是关于谱型 c 在低频部分下降的一种解释.

5. 光学薄同步源，其自身的不均匀性可产生倒转谱，读者须得当心，不要将 c 型低频倒转谱误认作源一定是低频段光学厚，有强吸收的标志，许多较暗弱的，很延展的同步辐射源应当是光学薄的，但同样具有 c 型谱. 这很可能产生于球对称源内相对论电子及磁场的径向分布的不均匀性. 例如形为 $B = B(r) \propto r^{-l}$，以及 $N_e = N_e(r) \propto r^{-m}$，假如相对论电子能谱处处相同，为 $N_e(\gamma) = N_0 \gamma^{-n}$(当

$\gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_2$，这个假定看来合理，相当于说源内各处相对论电子有相同的产生机制，对于爆发源，也相当于说初始时刻产生的具有上述能谱的电子瞬间由爆发散布到各处）. 如果把这一不均匀的球对称的源分解成一系列球壳层则不同壳层产生的同步辐射谱自然有相同的幂律谱指数，$q=(n-1)/2$，但辐射系数 j_ν 各壳层将不相同，（因 $j_\nu^{(r)} \propto N_0(r) B^{\frac{n+1}{2}}(r)$ 与半径 r 有关.）此外，各壳层产生的幂律谱的频率上，下限也不相同$\left(\gamma_1^2 \dfrac{eB(r)}{2\pi m_0 c} \leqslant \nu \leqslant \gamma_2^2 \dfrac{eB(r)}{2\pi m_0 c}\right)$. 半径 r 小的壳层贡献较高频段的幂律辐射，且发射系数 j_ν 较大，半径大的外壳层则产生低频段的辐射，发射较弱，读者可试将各壳层产生的幂律谱逐一画在对数图 $\lg j_\nu^{(r)}$-$\lg \nu$ 上，即可理解为什么各壳层的辐射的叠加求和会产生 c 型谱. 这种单纯由源的不均匀性产生的低频倒转谱的详细计算可参阅作者及其合作者的工作（You Junhan et al.，*Astro. and Astrophys.*（1984），**131**，77）.

4.2.9　同步辐射的自吸收

极端相对论电子在磁场中旋进时，除产生同步辐射外，亦可产生逆过程——同步辐射的自吸收. 如果辐射区的线度足够大，相对论电子足够密，就必须考虑电子对射频光子的这一吸收过程，它有可能显著改变同步辐射的原始谱形.

现求磁场中极端相对论电子气的自吸收系数 k_ν. 设 $N(\boldsymbol{p})d^3\boldsymbol{p}$ 是相对论电子的分布函数，表示单位体积中动量在 $\boldsymbol{p}$—$\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}$ 中的相对论电子数. $I_\nu(\Omega)$是沿给定方向 Ω 的辐射强度. 当辐射束穿过气体时，会使相对论电子产生感应吸收跃迁，从动量为 $\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{K}$ 的态 1 跃迁到动量 $\boldsymbol{p}$ 的态 2，而使辐射减弱. 假定 I_ν 局限于 Ω 方向的小立体角 $\Delta\Omega$ 中，沿 Ω 方向作一小柱体，具有单位底面积，且与辐射束垂直. 其高为 Δx，则该柱体从辐射束中吸收的光子数应为（见第二章）

$$B_{12}(\Omega) N(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{K}) d^3\boldsymbol{p} I_\nu(\Omega) \frac{\Delta\Omega}{4\pi}.$$

其中 B_{12}是爱因斯坦感应吸收系数，$|\hbar K|=\frac{h\nu}{c}$是原辐射束中光子动量的大小. 同理，感应发射增加的光子数为

$$B_{21}(\Omega)N(\boldsymbol{p})d^3\boldsymbol{p}I_\nu(\Omega)\,\frac{\Delta\Omega}{4\pi}.$$

考虑到所有可能的感应吸收和感应发射跃迁，则净吸收引起的强度减少应为

$$-\Delta I_\nu=\int_{\boldsymbol{p}}\Big[B_{12}(\Omega)N(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{K})d^3\boldsymbol{p}I_\nu(\Omega)\,\frac{\Delta\Omega}{4\pi}$$

$$-B_{21}(\Omega)N(\boldsymbol{p})d^3\boldsymbol{p}I_\nu(\Omega)\,\frac{\Delta\Omega}{4\pi}\Big]h\nu\Delta x,$$

故得同步自吸收系数为

$$k_\nu\equiv-\frac{1}{I_\nu}\,\frac{\Delta I_\nu}{\Delta x}=\int_{\boldsymbol{p}}[B_{12}N(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{K})$$

$$-B_{21}N(\boldsymbol{p})]h\nu\frac{\Delta\Omega}{4\pi}d^3\boldsymbol{p}.$$

或者，将动量空间体元 $d^3\boldsymbol{p}$ 改写为 $4\pi p^2dp$，则有

$$k_\nu=\int_p[B_{12}N(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{K})-B_{21}N(\boldsymbol{p})]h\nu p^2dp\Delta\Omega.\quad(4.86)$$

由(4.86)式可见，求同步自吸收系数 k_ν 将归结为找到分布 $N(\boldsymbol{p})$及爱因斯坦系数 B_{12}和 B_{21}. 根据第二章公式，三个爱因斯坦系数 B_{12}，B_{21}，与 A_{21}之间有以下关系式：

$$B_{12}=B_{21}=\frac{A_{21}c^2}{2h\nu^3}$$

故若求得爱因斯坦自发辐射系数 A_{21}，即可定出 B_{12}，B_{21}，而 A_{21}可按下述办法求得.

由于一个能量 γ 的电子的同步辐射功率是已知的[见本章(4.62)式]，即

$$P(\nu,\gamma)=\frac{2\pi\sqrt{3}\,e^2\nu_L\sin\alpha}{c}\left[\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\frac{\nu}{\nu_c}}^{\infty}K_{5/3}(t)dt\right],$$

其中 $\nu_L\equiv\frac{eB}{2\pi m_0c}$是拉摩频率，$\nu_c\equiv\frac{3}{2}\gamma^2\nu_L$.

将同步辐射过程视为相对论电子在磁场中的自发辐射跃迁过程，则功率亦可写为

$$P(\nu,\gamma) = A_{21} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} h\nu,$$

式中 $\Delta\Omega$ 是同步辐射中的辐射角锥大小. 由于相对论集束效应，电子大体只沿运动方向发射光子，其立体角锥 $\Delta\Omega \ll 4\pi$，结果得到

$$A_{21} = \frac{4\pi P(\nu,\gamma)}{h\nu\Delta\Omega}, \tag{4.87}$$

因而得到

$$B_{12} = B_{21} = \frac{4\pi c^2 P(\nu,\gamma)}{2h^2\nu^4\Delta\Omega}.$$

代入(4.86)式得到

$$k_\nu = \frac{4\pi c^2}{2h\nu^3}\int_p P(\nu,\gamma)[N(\boldsymbol{p} - \hbar\boldsymbol{K}) - N(\boldsymbol{p})]p^2 dp.$$

上式可进一步简化. 按通常假定，源中电子速度有各向同性分布，则分布 $N(\boldsymbol{p})$应只与动量大小 p 有关，故可写为

$$N(\boldsymbol{p}) = N(p).$$

同样又由于同步辐射中的相对论集束效应，电子动量 $\boldsymbol{p}$ 和它发射(或吸收)的光子动量 $\hbar\boldsymbol{K}$ 几乎是平行的，近似有 $\boldsymbol{p} /\!/ \boldsymbol{K}$，故

$$N(\boldsymbol{p} - \hbar\boldsymbol{K}) \simeq N(p - \hbar K) = N\left(p - \frac{h\nu}{c}\right).$$

又由于辐射是低频射电光子，故 $h\nu \ll cp$(cp 是相对论电子的能量)，于是有

$$N\left(p - \frac{h\nu}{c}\right) - N(p) \simeq -\frac{h\nu}{c}\frac{dN(p)}{dp}.$$

在继续演算之前，将上式再改写一下. 注意，根据定义，式中 $N(p)$表示的是单位体积中动量大小为 p 而运动方向在单位立体角中的电子数. 如果用单位体积中动量大小为 p 而不问其方向的所有电子的总密度 $\tilde{N}(p)$置换 $N(p)$，则两者关系显然是 $\tilde{N}(p) = 4\pi N(p)$，故有

$$k_\nu = \frac{-c}{2\nu^2}\int P(\nu,\gamma)\frac{d\tilde{N}(p)}{dp}p^2 dp. \tag{4.88}$$

把电子动量谱$\tilde{N}(p)$变为电子能谱$N(\gamma)$，显然有

$$\tilde{N}(p)4\pi p^2 dp = N(\gamma)d\gamma.$$

"能量"γ和动量p的关系可由$E\simeq cp$导出，故

$$\gamma \equiv \frac{E}{m_0c^2} \simeq \frac{cp}{m_0c^2} = \frac{p}{m_0c}. \tag{4.89}$$

因此

$$\tilde{N}(p) = \frac{N(\gamma)}{4\pi p^2}\frac{d\gamma}{dp} = \frac{N(\gamma)}{4\pi}\cdot\frac{1}{m_0^3c^3}\frac{1}{\gamma^2},$$

$$\frac{d\tilde{N}(p)}{dp} = \frac{1}{4\pi m_0^3c^3}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{N(\gamma)}{\gamma^2}\right)\frac{d\gamma}{dp}$$

$$= \frac{1}{4\pi m_0^4c^4}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{N(\gamma)}{\gamma^2}\right).$$

代入(4.88)式，得到

$$k_\nu = \frac{-1}{8\pi\nu^2}\frac{1}{m_0}\int_\gamma P(\nu,\gamma)\gamma^2\cdot\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{N(\gamma)}{\gamma^2}\right)d\gamma. \tag{4.90}$$

此即计算同步自吸收系数的基本公式.假如相对论电子具有幂律能谱，

$$N(\gamma) = N_\gamma\gamma^{-n},$$

代入(4.90)式，即得同步辐射自吸收系数为(参见参考文献[5])，

$$k_\nu = g(n)\frac{e^3}{2\pi m_0}\left(\frac{3e}{2\pi m_0^3c^5}\right)^{n/2}N_\gamma(m_0c^2)^{n-1}$$

$$\cdot B^{\frac{n+2}{2}}\sin^{\frac{n+2}{2}}\alpha\nu^{-\frac{n+4}{2}}, \tag{4.91}$$

其中

$$g(n) = \frac{\sqrt{3}}{16}\Gamma\left(\frac{3n+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3n+10}{12}\right)\left(n+\frac{10}{3}\right).$$

$g(n)$的具体数值列表如下：

n	1	2	3	4	5
$g(n)$	0.96	0.70	0.65	0.69	0.83

即$g(n)$为量级~ 1的系数.最后，将(4.91)式写为

$$k_\nu = g(n)(0.019)(3.5\times10^9)^n(8.20\times10^{-7})^{n-1}$$

$$\cdot N_r B^{\frac{n+2}{2}} \sin^{\frac{n+2}{2}} \alpha \nu^{-\frac{n+4}{2}}. \tag{4.92}$$

(4.92)式表明,当频率下降时,吸收变大. 利用(4.91)或(4.92)式可以讨论一个同步自吸收显著,在低频呈光学厚性质的同步辐射源(致密源)的射电谱特性. 对于一个厚度 L 的均匀介质层,已知

$$I_\nu \sim \int_0^L j_\nu e^{-k_\nu s} ds = \frac{j_\nu}{k_\nu}(1 - e^{-k_\nu L}).$$

当频率足够低,使得光深 $k_\nu L \gg 1$,则有

$$I_\nu \simeq j_\nu / k_\nu \propto \nu^{-\frac{n-1}{2}} \nu^{\frac{n+4}{2}} = \nu^{\frac{5}{2}}. \tag{4.93}$$

(4.93)式说明,对于一个致密的同步辐射源,由于自吸收使低频端呈光学厚性质时,低频段不能再保持幂律谱形,而出现低频倒转谱(上节提到的 c 型谱). 频率越低则强度越小.

显然,(4.93)式给出的低频段谱形也不同于光学厚的热平衡辐射的谱形,即黑体谱. 按第二章(2.6)式,瑞利-金斯公式给出的低频黑体谱为

$$I_\nu = \frac{2kT}{c^2}\nu^2 \propto \nu^2.$$

将它与(4.93)式比较可知,光学厚的同步辐射源在低频段有更陡的强度下降.

§4.3 曲率辐射

4.3.1 曲率辐射及其基本公式

在非常强的磁场中(例如强磁中子星极区磁场常可达到 $B \sim 10^{12}$Gs,其临界磁场是 $B_{cr} = \frac{m_0^2 c^3}{e\hbar} = 4.414 \times 10^{13}$Gs),非相对论性热电子($v \ll c$)的回旋辐射和回旋吸收有重要意义,是 X 射线天文学中的重要机制. 然而在强磁场情况下,假如没有持续不断的相对论电子的大量补充,同步辐射的重要性就会变小. 原因是强场中的相对论电子寿命太短. 把相对论电子的投射角(速度 v 和磁场 $\mathbf{B}$ 之夹

角)记做 α. 只要 α 不是太小,则速度在平行和垂直磁场方向的分量 $v_{/\!/}$ 和 $v_{\perp}$ 就都是相对论性的. $v_{\perp}=v\sin\alpha$ 就是电子绕强磁场回转产生同步辐射的有效速度. 按照(4.53)式,该电子同步辐射寿命量级约为 $t_{sy}\simeq 10^{9}\gamma^{-1}B_{\perp}{}^{2}$(s). 取 $\gamma=10^{3}$, $B\simeq 10^{12}$ Gs,则 t_{sy} 仅为 $\sim 10^{-18}$s! 按(4.49)式,相对论电子在磁场中回转频率是 $\omega_0=\frac{1}{\gamma}\omega_B \simeq 10^{7}\gamma^{-1}B\simeq 10^{16}/\text{s}$,故 $\omega_0 t_{sy}\simeq 10^{-2}$. 这表明,一个有效速度是 $v_{\perp}\simeq c$ 的相对论电子在强场中只生存 10^{-18}s,大体只回转 ~ 0.01 圈即告"死亡",转变成 $v\ll c$ 的非相对论性热电子,不再产生同步辐射. 注意该电子沿磁场的速度 $v_{/\!/}$ 仍保持为相对论性. 此时在强磁场中会有一种新的辐射机制——曲率辐射. 它补充了同步辐射,有很大的重要性. "曲率辐射"指的是相对论电子在很强的磁场中沿弯曲磁力线运动时所产生的辐射. 由于磁场很强,任何横越磁力线的运动实际上不可能存在,电子只能沿磁力线运动. 在磁力线本身弯曲的情况下,相对论电子将获得 $\sim\frac{c^2}{\rho}$ 的法向加速度, ρ 是该点磁力线的曲率半径. 由于其瞬时运动情况相似于磁场中沿圆轨道运动的相对论电子,故其辐射行为也应与圆轨道电子的同步辐射相似. 因此,同步辐射的基本公式也可应用于曲率辐射,只需将公式中一些参数作适当改动即可.

在同步辐射的定性分析中已经指出,磁场 $\boldsymbol{B}$ 中沿圆轨道运动的"能量"为 γ(洛伦兹因子)的电子,其最低辐射频率(基频)也就是电子的回旋频率为

$$\nu_0=\frac{eB}{2\pi mc}=\frac{eB}{2\pi m_0 c}\,\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\gamma}\nu_L,$$

ν_L 是拉摩频率. 该电子的圆轨道半径为

$$r_0\simeq\frac{c}{2\pi\nu_0}=\frac{m_0c^2}{eB}\gamma,$$

所以同步辐射基频也可写为

$$\nu_0\simeq\frac{c}{2\pi r_0}.$$

与上述情况相类似，一个沿曲率半径 ρ 运动的相对论电子($v \simeq c$)，则曲率辐射的基频应为

$$\nu_0 \simeq \frac{c}{2\pi\rho}. \tag{4.94}$$

同样可以类似地找到曲率辐射的峰频(即主要辐射频率). 按(4.59)式，相对论电子同步辐射的临界频率为

$$\nu_c = \frac{3}{2}\gamma^2\nu_L = \frac{3}{2}\gamma^3\nu_0,$$

ν_c 近似地等于同步辐射的峰频. 类似地，相对论电子的曲率辐射临界频率(近似为峰频)为

$$\nu_c = \frac{3}{2}\gamma^3\nu_0 \simeq \frac{3}{2}\gamma^3\left(\frac{c}{2\pi\rho}\right). \tag{4.95}$$

与(4.58)式相类似，得到"能量"γ 的电子沿曲率半径 ρ 运动时曲率辐射的谱功率(单位频率间隔的辐射功率)为

$$p_\nu = \frac{2\pi\sqrt{3}\,e^2\nu_0\gamma}{c}\left[\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(t)dt\right], \tag{4.96}$$

其中 ν_c 由(4.95)给出①.

与同步辐射谱形相类似，(4.96)式给出的 P_ν-ν 曲线是：在 $\nu \simeq \nu_0$ 的低频端，$\nu/\nu_c \ll 1$，$P_\nu \propto (\nu/\nu_c)^{1/3}$，$P_\nu$ 随频率 ν 单调上升. 到达临界频率 $\nu_c = \frac{3}{2}\gamma^3\nu_0$ 附近，P_ν 随 ν 指数式减少. 但同步辐射和曲率辐射在低频端处有一个差别，即曲率辐射 $P_\nu \propto \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3}$ 和电子"能量"γ 无关；这只需注意 $\nu_c \propto \gamma^3$[见(4.95)式]以及(4.96)式分子中的 γ 因子便可. 而同步辐射低频段功率虽也是 $P_\nu \propto \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3}$，但与 γ 有关，因基频 $\nu_0 = \frac{\nu_L}{\gamma}$ 含有 γ，因此 $\nu_c \propto \gamma^3\nu_0 \propto \gamma^2$.

同样因相对论集束效应，曲率辐射也集中于沿电子运动方向

① 为了便于将同步辐射公式(4.58)移植到曲率辐射，我们将原式中的拉摩频率 ν_L 代以 $\gamma\nu_0$，$\nu_L = \gamma\nu_0$.

狭小角锥内. 半张角为

$$\theta_{\max} \simeq \frac{1}{\gamma}. \tag{4.97}$$

曲率辐射的偏振特性也可通过类比找到.

曲率辐射常常用来说明脉冲星、类星体等高能天体的辐射现象. 采用通常的中子星参数(例如参见 Sturrock, 1971, *Ap. J.*, **164**, 529), 取中子星磁层的半径为 $\rho \sim 10^8$cm, 它在量级上也就是磁力线的曲率半径. 按(4.94)式, 曲率辐射的基频(低频截止)为 $\nu_0 \simeq 10^2$Hz. 对于 $\gamma \simeq 10^7$ 的极端相对论电子, 曲率辐射峰频为 $\nu_c \simeq 10^{23}$Hz. 已处于 γ 射线波段; 而对 $\gamma \simeq 10^3$ 的次级相对论电子, $\nu_c \simeq 10^{11}$Hz, 处在射频范围[见(4.95)式].

同步辐射和曲率辐射具有相同的本质, 只是前者是消耗相对论电子的垂直磁场的动能, 后者则利用平行磁场的动能而已. 最近我国学者郑广生和张家铝推导出一个普遍公式, 对这两种辐射做出统一的描述. 而同步辐射和曲率辐射则是这一普遍公式的两种极限形式(参见 J. L. Zhang and K. S. Cheng, *Phy. Lett. A.*, **208**, 1955, 47).

4.3.2 相干的曲率辐射

先来说明什么是相干辐射和非相干辐射的问题. 设辐射源由 N 个带电粒子组成, 若系统的辐射强度 I_t 超过各个单个粒子的辐射强度的和, 即

$$I_t > \sum_{j=1}^{N} I_j,$$

则称这 N 个粒子的辐射是相干的, 这个源称为相干辐射源. 式中 I_j 表示第 j 个粒子的强度. 反之, 若源的总强度 I_t 不超过各个粒子的强度的和, 即

$$I_t \leqslant \sum_{j=1}^{N} I_j,$$

则称为非相干辐射, 式中不等式是由于考虑了介质有可能存在着

吸收的因素.

物理上看来，相干辐射和非相干辐射的本质差别在于，前一种情况下，各个粒子辐射之间有确定相位关系，而后者却没有固定相位关系. 相干辐射情况下的总辐射有可能达到非常大的强度，这就是它之所以受到天体物理学重视的最主要的原因. 例如，蟹状脉冲星 NP0532，其射电辐射的亮温度 T_B 高达～$10^{24\sim25}$K（若射电发射区不在光柱附近，而在中子星表面，则射电波段亮温度更高，达 10^{29}K），而 X 射线和光学段亮温度至多才 10^6K，（若发射区在中子星表面，也至多 10^{14}K.）因此，即使光学和 X 射线可以用非相干辐射来说明，而过强的射电波段辐射则只能求助于相干辐射来给出合理的说明. 此外，观测到射电波的高度线偏振也是无法用非相干机制说明的. 目前，相干的同步辐射、相干的曲率辐射等过程都受到广泛重视.

存在两种不同的相干辐射机制. 第一种是"天线机制"，即当辐射粒子聚集成团束时所产生的相干性. 此时各单个粒子辐射场的相位之间有确定的关系，因此当各粒子的场强叠加时，就可能使总强度超过各粒子辐射强度的和. 一个极端情况是各粒子的辐射场同相位，此时总场强

$$\boldsymbol{E}_t = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{e}_j = N\boldsymbol{e}_j,$$

而总强度则为 $I_t = N^2 I_j \gg N I_j$. 这种相干辐射机制和发射天线中各自由电子辐射之间的相干性是一样的. 第二种机制是天体"脉泽"机制（maser）. 它不要求大量带电粒子聚集成团束，但要求介质中粒子的能量分布远离热平衡分布，出现"粒子数反转"（即高能值的粒子数反多于低能值粒子）. 这就使介质的吸收系数 k_ν 成为负值，$k_\nu < 0$. 当波在介质中传播时，强度将随距离指数增加. 这种相干机制中，各粒子的辐射间的确定相位关系是由辐射本身的作用造成的.

本节讨论的相干曲率辐射就是一种天线机制. 为了对相干的曲率辐射作一些定量的讨论，下面作一些简化假定：

1. “粒子团束”的外形很简单，就是一根沿粒子速度$\boldsymbol{v}$方向的直条“棒”，长为l，且粒子在该棒中均匀分布，线密度记为n，总粒子数为$N=nl$.

2. 假定棒中各粒子有相同速度$\boldsymbol{v}$，这就保证棒不变形和解体.

3. 棒中相邻两粒子间距δ远小于其辐射波长λ，$\delta\ll\lambda$，亦即棒中可以视为具有连续电荷分布. 电荷线密度$\sigma=ne$，总电荷$Q=\sigma l=nel=Ne$.

把单位电荷辐射场$\boldsymbol{e}(\gamma,\rho,\theta,R)$的单色傅氏分量记为$\boldsymbol{e}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R)$，则有

$$\boldsymbol{e}(\gamma,\rho,\theta,R)=\int_0^\infty \boldsymbol{e}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R)e^{-i\omega t-ikR}d\nu.$$

其中γ是这一具有单位电荷粒子的“能量”(γ是洛伦兹因子)，ρ是磁力线曲率半径，θ是辐射方向与速度$\boldsymbol{v}$之夹角，

$$k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi\nu}{c}.$$

观察点P位置由(R,θ)确定(见图4.17).

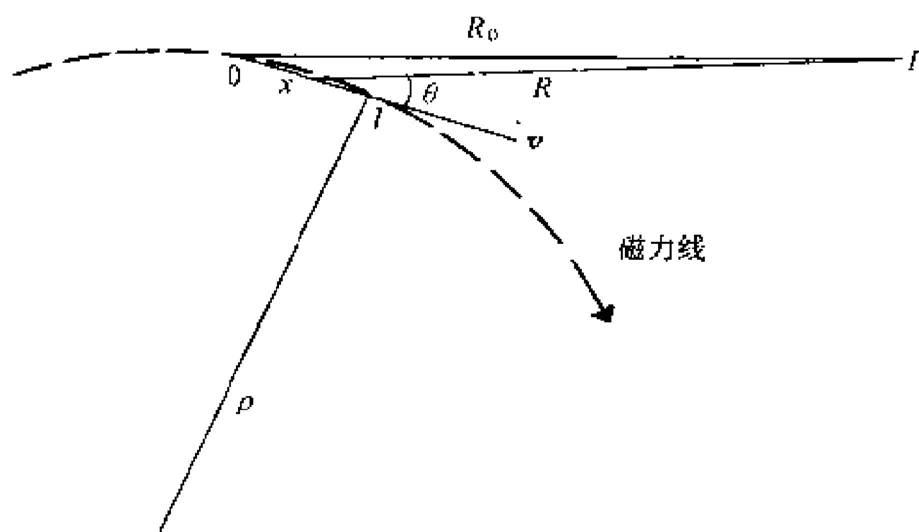


图 4.17

P点总场强$\boldsymbol{E}_t(\gamma,\rho,\theta,R)$是棒上各点辐射场的叠加，即

$$\boldsymbol{E}_t(\gamma,\rho,\theta,R)=\int_0^l \boldsymbol{e}(\gamma,\rho,\theta,R)\sigma dx.$$

图中 x 轴平行于棒方向，原点选在棒左端. 对总场也可以作傅氏分解，即

$$\boldsymbol{E}_t(\gamma,\rho,\theta,R)=\int_0^\infty \boldsymbol{E}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R)d\nu,$$

因此得到

$$\boldsymbol{E}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R)=\int_0^l \boldsymbol{e}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R)e^{-ikR}\sigma dx.$$

由图 4.17 可见，

$$R\simeq R_0-x\cos\theta,$$

于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R)&=e^{-ikR_0}\sigma\int_0^1 \boldsymbol{e}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R)e^{i\frac{2\pi\nu}{c}x\cos\theta}dx\\&=\frac{c\sigma e^{-ikR_0}}{i2\pi\nu\cos\theta}\left[e^{i\frac{2\pi\nu l}{c}\cos\theta}-1\right]\boldsymbol{e}_\nu(\gamma,\rho,\theta,R),\end{aligned}$$

故在 P 点的辐射能流为

$$\begin{aligned}P_\nu(p)=P_\nu(R,\theta)&=\frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}_\nu|^2=\frac{c}{4\pi}Q^2\frac{\sin^2\delta_\nu}{\delta_\nu^2}|\boldsymbol{e}_\nu|^2\\&=Q^2\frac{\sin^2\delta_\nu}{\delta_\nu^2}p_\nu,\end{aligned}$$

其中

$$\delta_\nu\equiv\pi\frac{\nu}{\nu_c}\cos\theta,\qquad \nu_c\equiv\frac{c}{l},\qquad Q=\sigma l=Ne.$$

$p_\nu=\frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{e}_\nu|^2$ 则表示单位电荷粒子的辐射能流. 把 $Q=Ne$ 代入上式，则有

$$P_\nu(R,\theta)=N^2\frac{\sin^2\delta_\nu}{\delta_\nu^2}e^2P_\nu=N^2\frac{\sin^2\delta_\nu}{\delta_\nu^2}\tilde{P}_\nu(R,\theta),$$

其中 $\tilde{P}_\nu(R,\theta)\equiv e^2p_\nu$ 表示一个电量为 e 的粒子在(R,θ)点的辐射能流. 上面诸式中，脚标 γ,ρ 省略不写.

显然，直棒沿 θ 方向的总辐射强度 $I_\nu(\theta)$ 与单个电量为 e 的粒子在该方向的强度 $i_\nu(\theta)$ 之间的关系也应当是

$$I_\nu(\theta) = N^2 \frac{\sin^2\delta_\nu}{\delta_\nu^2} i_\nu(\theta), \tag{4.98}$$

其中

$$\delta_\nu = \pi \frac{\nu}{\nu_l} \cos\theta, \qquad \nu_l = \frac{c}{l}.$$

可见，由于棒上各粒子辐射之间有确定相位关系，相干叠加的结果使总强度 $I_\nu(\theta)$ 不等于各粒子辐射强度的和，$I_\nu(\theta) \neq N i_\nu(\theta)$. 在一定条件下，可以使相干辐射强度 $I_\nu(\theta) \gg N i_\nu(\theta)$. 现来说明相干加强的条件，在 $l \ll \rho$ 的合理假定下（见图 4.17，因粒子束是沿磁力线运动的，只当 $l \ll \rho$ 情况下，才可近似看成直条"棒"），

$$\nu_l = \frac{c}{l} \gg \frac{c}{\rho} \simeq \nu_0.$$

当辐射频率 ν 小，即 $\nu_0 \lesssim \nu \ll \nu_l$ 时，有

$$\delta_\nu \simeq \pi\nu/\nu_l \simeq 0.$$

故由(4.98)式得到

$$I_\nu(\theta) \simeq N^2 i_\nu(\theta) \gg N i_\nu(\theta). \tag{4.99}$$

以上说明在低频条件下，相干强度远超过非相干强度，即远超过各粒子强度的和.

条件 $\nu \ll \nu_l$ 自然也可写为

$$\lambda \gg l,$$

即辐射的低频波波长必须远大于棒长 l. 这一不等式表明，在 $l \ll \lambda$ 的情况下，各粒子的辐射几乎是同相位的，所以成为 N 个粒子的场强求和，而不是强度求和，遂使相干强度剧增.

在 $\lambda \gg l$ 条件下，除了相干强度很大这一特点外，辐射谱形也和单个电子的谱形相同[见(4.99)式]，即 $I_\nu(\theta) \propto \nu^{1/3}$.

假如不满足低频条件，$\nu \ll \nu_l$（或 $\lambda \gg l$），即当 $\nu \gtrsim \nu_l$ 时，(4.98)式中的因子将有

$$\frac{\sin^2\delta_\nu}{\delta_\nu^2} \simeq \frac{\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_l}\right)}{\left(\frac{\pi\nu}{\nu_l}\right)^2} \ll 1.$$

这时相干总强度 I_ν 由(4.98)式给出，以上因子不可忽略. 由(4.98)式可见，因子 $\sin^2\delta\nu/\delta_\nu^2$ 带来两个后果：首先，在 $\nu\gtrsim\nu_l$ 的"高频"段，总强度 I_ν 显著下降，$I_\nu\ll N^2 i_\nu$. 其次，由于该因子和频率 ν 的关系，使"高频"段谱形不再和单电子的辐射谱($\propto\nu^{1/3}$)相同，而是出现振荡的谱形. 极大值和极小值交替出现，极大值高度$\propto\nu^{-\frac{5}{3}}$(因为因子 $\sin^2\delta_\nu/\delta_\nu^2$ 的分母中含有 ν^2)，极小值为零(见图 4.18). 图中只画了几个极大值，以后的极大值均等间隔出现，用虚线表示各极大值的高度.

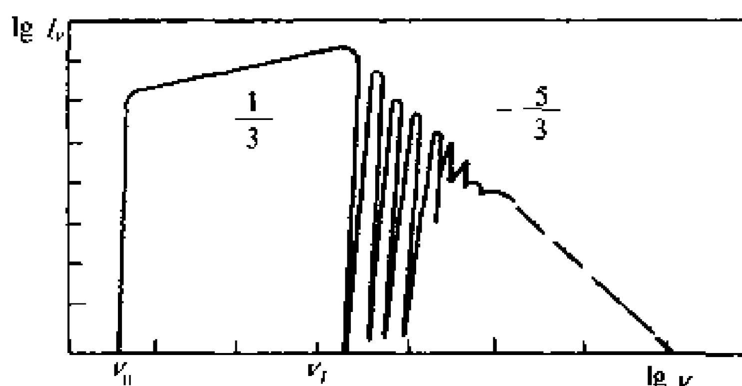


图 4.18

极小值位于频率 $\nu=m\nu_l$ 处($m=1,2,3,\cdots$)，或者写成 $\lambda=\dfrac{l}{m}$. 这表示当"棒"长 l 恰为波长 λ 的整数倍时，对于这一波长的辐射，得到相干极小.

最后指出，当频率 $\nu\gg\nu_l$(当然 $\nu<\nu_c$)，则相干强度公式(4.98)失效，即(4.98)式并不适用于任意频率，而存在一个频率上限. 这是因为相对论电子的辐射具有显著方向性所致，半张角 $\theta_{\max}\simeq(\nu_0/\nu)^{1/3}$，所以高频时 $\theta_{\max}\ll1$. 另一方面，沿 $\boldsymbol{B}$ 运动的"直棒"，严格地说是一段弧形(半径为 ρ)，故在非常高的频率上，弧形棒的头尾两端的辐射角锥在空间已不重合. 由于头尾两端电荷辐射方向不一致，自然不存在相干的可能. 能够产生相干辐射的临界频率 ν 可由下式估计：

$$\frac{l}{\rho} \lesssim \theta_{max} \simeq (\nu_0/\nu)^{1/3}.$$

由此得到临界相干频率为

$$\nu \leqslant \left(\frac{\nu_l}{\nu_0} \right)^2 \nu_l. \qquad (4.100)$$

参 考 文 献

[1] Bekefi, G., Radiation Processes in Plasmas, Wiley, New York, 1966.

[2] Blumenthal, G. and Gould, K., *Phys. Rev.*, D2, 2252, 1970.

[3] Erdelyi, A., Higher Transcendental Function. Vol. 1, McGrowHill book Co., New York, 1953.

[4] Ginzburg, V. and Syrovatskii, S., The Origin of Cosmic Rays, Pergamon, London, 1964.

[5] Ginzburg, V. and Syrovatskii, S., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **3**(1965), 297.

[6] Ginzburg, V. and Syrovatskii, S., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **7**(1969), 375.

[7] Jackson, J., Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962. (有中译本)

[8] Kardashev, N., *Sov. Astro.*, **6**(1962), 317.

[9] Kellerman, K. and Pauling-Toth, I., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **6**(1968), 417.

[10] Longair, M. S., High Energ Astrophysics, Cambridge, 1992.

[11] Melrose, D., *Astrophys. Space Sci.*, **5**(1969), 131.

[12] Pacholczyk, a., Radio Astrophysics, Freeman, San Francisco, 1970. (有中译本)

[13] Ribicki, G. B. and Lightman, A. P., Radiation Processes in Astrophysics, Freeman, San Francisco, 1982.

[14] Ruderman, M., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **10**(1972), 427.

[15] Sagion, A., *Astro. Ap.*, **44**(1975), 285.

[16] Scheuer, P. and Williams, P., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **6**(1968), 321.

[17] Frank, H. Shu, The Physics of Astrophysics, Volume I: Radiation, University Science Books, Mill Valley, California, 1992.

[18] Tsytovich, V., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **11**(1973), 363.

[19] Westfold, K. C., *Astrophys. J.*, **130**(1959), 241.

[20] You Junhan, Chen Peisheng, Gao Heng, Tan Weisong, *Astro. and Astrophy.* **131**, 77, 1984.

第五章 逆康普顿散射(康普顿辐射)

按照经典观念,当相对论电子和辐射场中光子碰撞时,也会获得加速度,引起辐射.这就是本章将要介绍的一种辐射机制,称为康普顿辐射,也称为逆康普顿散射.这一过程在天体物理学中也很重要.如果将同步辐射看成为射电天文学中的基本过程,那么康普顿辐射就是X射线天文学和γ射线天文学中的基本过程,它也是相对论电子在辐射场中穿行时损失能量的一种机制.

逆康普顿散射过程和平常所说的康普顿散射相反.在后一种散射中,高频光子(例如γ射线光子)与近似地视为静止的低速电子相碰撞,结果使散射光子减少了能量,这部分能量交给了电子;而在逆康普顿散射中,入射光子能量$h\nu$显著地小于相对论电子能量γm_0c^2,即这时发生低频光子和相对论电子的碰撞,其结果与前面的情况正相反:电子将部分动能转移给光子,使散射光子的能量(因而频率)增加.逆康普顿散射是光子能量增加的过程,因此也就是相对论电子的一种辐射过程.①

对于电子-光子碰撞的两类康普顿过程,可作一个浅显的经典类比.在经典的两球碰撞中,动能较大的"主动"球将损失能量,动能小的"被碰"球总是获得能量.

在讨论逆康普顿散射之前,有必要先来介绍电子散射光子的经典理论.这一方面是由于后面将会涉及到一些经典散射观念;另一方面是,经典散射的讨论对分析逆康普顿散射也是有启发的.

---

① 有些作者把第三章中介绍的在$h\nu\ll kT$条件下的康普顿硬化过程,即低频光子与高温电子气中的热电子的散射过程也称做逆康普顿散射.

§ 5.1 经典汤姆孙散射，散射截面

当频率为 ω 的外来电磁波投射到自由电子上时，电子就会在电磁波作用下，以同样频率 ω 作强迫振动，并不断辐射该频率的次波. 这种现象称为汤姆孙散射. 假定自由电子的速度 v 比光速 c 小很多，$v \ll c$，则电子受迫振动的振幅比电磁波长小很多. 所以在振幅范围内，场强可看作与位置无关，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$. 此外，磁场的洛伦兹力可以略去. 因此，电子运动方程即为

$$m_0 \ddot{\boldsymbol{r}} = -e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t},$$

解为

$$\boldsymbol{r} = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m_0\omega^2} e^{-i\omega t},$$

即电子将沿电场方向作简谐振动，成为电谐振子，其电偶极矩为

$$\boldsymbol{d} = -e\boldsymbol{r} = \frac{-e^2}{m_0\omega^2}\boldsymbol{E},$$

以及

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = \frac{e^2}{m_0}\boldsymbol{E}.$$

可见，$\ddot{\boldsymbol{d}}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 平行. 电子的受迫振动会引起偶极辐射，如图 5.1(a) 所示. 散射波的角分布应由(1.14)式给出，即沿单位立体角的辐射功率为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{d}^2 \sin^2\Theta}{4\pi c^3} = \frac{c^4E^2}{4\pi m_0^2 c^3}\sin^2\Theta = r_0^2 c\,\frac{E^2}{4\pi}\sin^2\Theta,$$

或者

$$\frac{dP}{d\Omega} = r_0^2 S \sin^2\Theta, \tag{5.1}$$

式中 $r_0 = \frac{e^2}{m_0c^2}$ 是电子经典半径. $S = \frac{c}{4\pi}E^2$ 是入射波的能流，而 Θ 角则是观测方向 $\boldsymbol{n}$ 与偶极矩 $\boldsymbol{d}$ 或电矢 $\boldsymbol{E}$ 之间的夹角.

通常，入射波不是偏振的，即 $\boldsymbol{E}_0$ 在垂直于入射波传播方向 $\boldsymbol{K}$ 的平面内无规取向，因而图 5.1(b) 中的 φ 角在 0—2π 范围中以均

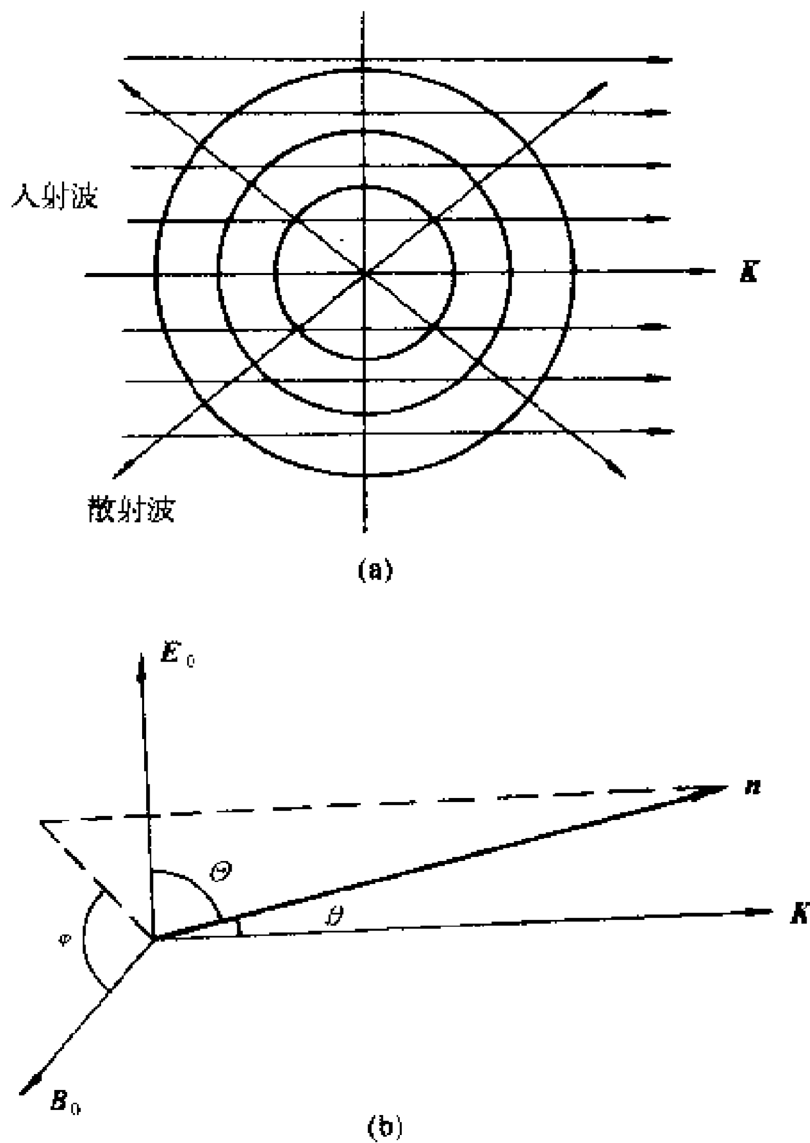


图 5.1

等的概率取值. 这时应将(5.1)式中的 $\sin^2\Theta$ 对场强 $\boldsymbol{E}$ 的所有取向求平均,也就是对各个可能的 φ 值求平均. 由图 5.1(b)易见,Θ 和 φ 的关系是

$$\sin^2\Theta = 1 - \cos^2\Theta = 1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi,$$

以及

$$\overline{\sin^2\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2},$$

所以

$$\overline{\sin^2\Theta}=1-\frac{1}{2}\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

因此，沿 $\boldsymbol{n}$ 方向单位立体角的辐射功率应为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{r_0^2S}{2}(1+\cos^2\theta),\tag{5.2}$$

式中 θ 角即散射波方向与入射波方向的夹角(即散射角). 对全部立体角积分，即可得单位时间内电子向各方向总的散射能量为

$$P=\int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega=\frac{r_0^2S}{2}\int_0^\pi(1+\cos^2\theta)2\pi\sin\theta d\theta=\frac{8\pi}{3}r_0^2S.\tag{5.3}$$

该式表示，对于能流是 S 的入射波而言，电子好像是一个横截面积为 $\frac{8\pi}{3}r_0^2$ 的不透明的球，它把入射波(横截面积是单位面积)中这样大一块面积的能流散布到其它方向上去. 这块面积称为电子的散射截面，记为 σ_T：

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}r_0^2=6.652\times10^{-25}\quad(\text{cm}^2).\tag{5.3'}$$

由(5.3)式还可看出，散射截面 σ_T 又等于单位时间散射的能量与单位时间流过单位面积的入射波能量之比.

$$\sigma_T=\frac{P}{S}.\tag{5.4}$$

(5.2)，(5.3)式通常称为汤姆孙散射公式. 除了散射截面之外，散射理论中还常有“微分散射截面”的概念，记为 $\frac{d\sigma_T}{d\Omega}$，其定义为电子在单位时间沿给定方向单位立体角散射的能量与单位时间通过单位面积的入射波能量之比，即

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega}=\frac{dP}{d\Omega}/S=\frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta).\tag{5.5}$$

上面是从经典观念引进散射截面和微分散射截面的概念. 在量子理论中，这些概念有了新的意义. 把入射光和散射光分别看作光子流，假定单位时间通过单位面积的入射光子数为 n，而每个光子能量为 $h\nu$，则入射能流就可写成 $S=nh\nu$. 同样，如果单位时间向

各方向散射的光子总数为 n'，再注意到散射光子能量仍为 $h\nu$，则得到沿各方向散射总功率应为 $P=n'h\nu$. 因此，(5.4)式中的散射截面即为

$$\sigma_T=\frac{P}{S}=\frac{n'}{n}=\frac{\text{单位时间被散射的光子数}}{\text{单位时间通过单位面积的入射光子数}}. \tag{5.6}$$

(5.6)式表明，散射截面 σ_T 反映着每个入射光子被散射的概率. 同理，微分散射截面

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega}=\frac{dP}{d\Omega}/S$$

反映了每个入射光子被散射到给定方向的单位立体角中去的概率大小.

必须指出，仅当入射光子的能量 $h\nu$ 比电子能量 m_0c^2 小很多时，即 $h\nu\ll m_0c^2$，经典散射公式(5.2)，(5.3)才是有效的，亦即只是低频光子才有汤姆孙散射. 当 $h\nu\simeq m_0c^2$ 时，量子效应的考虑就成为必要的了. 这就是下面要讨论的康普顿散射. 它和经典汤姆孙散射的最主要不同点是，散射光频率一般不同于入射光频率.

§5.2 康普顿散射，克莱因-仁科公式

与汤姆孙散射一样，现在仍然讨论一个静止的自由电子对光的散射，只是条件有所变化，现在是讨论当光子能量 $h\nu$ 与电子静能 m_0c^2 可以比较时的散射(γ 光子的散射)，因此必须考虑量子效应. 这时应把电子对光波的散射看成是电子-光子的碰撞过程. 入射光子的动量和能量分别记为 $h\boldsymbol{K}_i$，$h\nu_i$，原来静止的电子的动量 $\boldsymbol{P}_0=0$，能量 $W_0=m_0c^2$(我们把电子静质量记为 m_0). 碰撞后，光子动量为 $h\boldsymbol{K}_f$，能量为 $h\nu$，电子动量为 $\boldsymbol{P}$、能量为 W，碰撞过程必须满足能量守恒和动量守恒，由此可求出散射光频率 ν 和入射光频率 ν_i 之间的以下关系式：

$$\nu=\frac{\nu_i}{1+\frac{h\nu_i}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}, \tag{5.7}$$

式中 θ 仍代表散射角(入射光方向和散射光方向之间的夹角)，此

即康普顿散射公式. 它表明散射光频率一般不同于入射光频率，即散射伴随着频率的变化. 频率的变化量与散射角 θ 有关. 从(5.7)式可见，散射光子频率(能量)一般小于入射光子，亦即在碰撞中光子损失了能量，转移给了电子.

显然，当 $h\nu_i \ll m_0c^2$，则有 $\nu \simeq \nu_i$，这就回到了经典汤姆孙散射情况，亦即康普顿散射公式(5.7)包括了经典汤姆孙散射情况.

量子理论的计算给出(例如，参见 Heitler, "The Quantum Theory of Radiation", 1954)康普顿散射的微分截面公式为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}r_0^2\left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^2\left(\frac{\nu_i}{\nu}+\frac{\nu}{\nu_i}-\sin^2\theta\right), \tag{5.8}$$

式中 ν_i 和 ν 分别代表入射光子和散射光子的频率，ν 与 ν_i 的关系则由(5.7)式给出. θ 为散射角，r_0 是电子经典半径. 显然，在 $h\nu_i \ll m_0c^2$ 的极限情况下，由(5.7)式给出 $\nu \simeq \nu_i$，代入到(5.8)式中，则(5.8)式回到经典公式(5.5).

对 θ 角积分，得到电子对光子的总散射截面为

$$\sigma=2\pi r_0^2\left\{\frac{1+\Gamma}{\Gamma^3}\left[\frac{2\Gamma(1+\Gamma)}{1+2\Gamma}-\ln(1+2\Gamma)\right]+\frac{1}{2\Gamma}\ln(1+2\Gamma)-\frac{1+3\Gamma}{(1+2\Gamma)^2}\right\}, \tag{5.9}$$

其中 Γ 是入射光子能量与电子静能之比，$\Gamma=\dfrac{h\nu_i}{m_0c^2}$.

显然，当 $\Gamma\to\infty$ 时，$\sigma\to 0$，这表明当入射光子频率极高("硬光子")时，受到电子散射的概率非常小. 截面 σ 随入射光频率 ν_i 的增加而减小，这点不难从经典观念给予定性的说明：因为电磁波频率太高，则电子本身的惯性使它来不及响应，即电子的受迫振动很弱，因而散射很小.

当 $h\nu_i \ll m_0c^2$ 时，$\Gamma \ll 1$，则有

$$\sigma\simeq\sigma_T\left(1-2\Gamma+\left(\frac{26}{5}\right)\Gamma^2+\cdots\right),$$

其中 σ_T 即为电子汤姆孙散射的经典截面值. 可见，σ_T 是 σ 在 $\Gamma\to 0$ 时的极限值.

而当 $h\nu_i \gg m_0c^2$，$\Gamma \gg 1$，则(5.9)式化为

$$\sigma \simeq \left(\frac{3\sigma_T}{8}\right)\Gamma^{-1}\left(\ln 2\Gamma + \frac{1}{2}\right). \tag{5.10}$$

§5.3 辐射压，爱丁顿极限

现在可以讨论逆康普顿散射了. 但不妨暂时离开这一主题，讨论一个与此无关但在天体物理学中也是很重要的概念——辐射压. 辐射压的存在直接联系着电子对于电磁波的散射现象. 显然，电子和光子是相互影响的. 当光子被电子散射的同时，电子也受到入射光子施加的力. 为了简单起见，先考虑一束平面入射波对电子的作用. 若入射波(在一周期中)的平均能密度记为$\overline{U}$，$\overline{U}=nh\nu$，n是光子数密度，则平均动量密度为 $n\cdot\frac{h\nu}{c}=\frac{\overline{U}}{c}$，而动量方向自然沿着波的传播方向，从而单位时间通过垂直于波传播方向的单位面积的动量流是$\left(\frac{\overline{U}}{c}\right)\cdot c$. 当这一入射波通过一个散射电子时，按汤姆孙截面的意义(5.6)式，将在单位时间中损失掉一份动量

$$\left(\frac{\overline{U}}{c}\right)c\sigma_T=\sigma_T\overline{U}.$$

但注意到(5.5)式，微分散射截面$\frac{d\sigma_T}{d\Omega}$对角 θ 与 $\pi-\theta$ 对称，即向前与向后的两个对称方向的散射强度是相同的. 因此，在非相对论电子情况下，散射波的总动量应当是零. 这就说明，入射波失去的动量 $\sigma_T\overline{U}$并不是被散射波带走了，而是被这个电子所吸收. 电子在单位时间中吸收的动量 $\sigma_T\overline{U}$也就是它所受的平均辐射力，即$\overline{F}_{\rm rad}=\sigma_T\overline{U}$，是沿着入射波的传播方向. 知道了一个电子受的力$\overline{F}_{\rm rad}$，不难求出波作用于气体的辐射压强 $P_{\rm rad}$. 若电子密度是 N_e，而光子散射的平均自由程是 λ_{mfp}，则显然有 $P_{\rm rad}=(\sigma_T\overline{U})\lambda_{mfp}N_e$. 这里需要指出，在计算辐射压强 $P_{\rm rad}$时，只考虑到对电子的辐射力，原因是质子所受辐射力极小. 按(5.3′)式，散射截面 σ_T 反比于粒子质量平方，故质子截面

$$(\sigma_T)_p=\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2\sigma_T\ll\sigma_T,$$

可以略去不计. 由于光子平均自由程为 $\lambda_{mfp}=(N_e\sigma_T)^{-1}$,所以最后得到平面入射波对气体的辐射压强为 $P_{rad}=\overline{U}$. 对于各向同性辐射场,可以求得①

$$P_{rad}=\frac{1}{3}\overline{U}. \tag{5.11}$$

存在辐射压这一事实很重要,因为它限制了靠吸积释放引力能的恒星可能具有的最大辐射功率,即它阻碍了引力影响下物质的吸积过程.

吸积过程中,粒子下落到恒星表面时的引力能被释放出来. 由无穷远落到表面的粒子得到动能 $\sim\frac{GMm}{R}$,但由于和恒星大气的相互作用,这一动能终将转变为辐射. 这一转化过程既可直接通过轫致辐射过程来实现,也可间接通过碰撞过程使大气加热,产生辐射. 吸积是天体物理学中重要的辐射能源;例如,目前关于 X 射线脉冲双星和类星体的辐射等,普遍认为是来自吸积过程.

当辐射压力与引力互相抵销时,吸积就达到饱和,可以由此确定以吸积为辐射能源的恒星的极限光度值. 在求此最大光度时,必须注意这样一个事实,即电子和质子所受的力,无论是引力还是辐射力,都是彼此不同的. 其结果是,在引力与辐射力作用下,电子和

---

① 假设投向小面元 dA 的辐射与表面法线方向成 θ 角,则接受这一辐射的有效面积是 $\cos\theta dA$,所以这束辐射对 dA 的力为 $\overline{U}\cos\theta dA$,此力在法向的分力为 $\overline{U}\cos^2\theta dA$. 对各方向的辐射求积分,则得到对 dA 面元的总辐射力为

$$PdA=\frac{1}{4\pi}\int\overline{U}\cos^2\theta dA d\Omega=\frac{1}{4\pi}dA\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{U}\cos^2\theta d\Omega$$
$$=\frac{1}{3}\overline{U}dA,$$

亦即

$$P=\frac{1}{4\pi}\int\overline{U}\cos^2\theta d\Omega=\frac{1}{3}\overline{U},$$

于是证明了(5.11)式. 对于热平衡的辐射场,能密度 $\overline{U}\propto T^4$(见第二章),故辐射压强 $P_{rad}\propto T^4$.

质子会彼此分开，从而建立了一个感应电场，以阻止正负电荷粒子的继续分离. 在很快地建立平衡态后，附加的电场力就使电子和质子受到的力彼此相等，由此可定出感应电场 E_i. 电子受力为

$$Fe=\left(\frac{GMm_e}{r^2}\right)-\sigma_T\overline{U}+eE_i.$$

质子受力为

$$F_p=\left(\frac{GMm_p}{r^2}\right)-\sigma_T\overline{U}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^2-eE_i.$$

令 $F_e=F_p$，并略去含 $\left(\frac{m_e}{m_p}\right)$ 及其高次项，就得到

$$Ei=\frac{1}{2e}\left[\left(\frac{GMm_p}{r^2}\right)+\sigma_T\overline{U}\right].$$

因此，电子与质子所受的净力为

$$F_e=F_p=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{GMm_p}{r^2}\right)-\sigma_T\overline{U}\right].$$

假如 $F_e=F_p=0$，则表示吸积过程停止，由此求出辐射场的极限能密度应当是

$$\overline{U}_{\max}=\frac{GMm_p}{r^2\sigma_T}.$$

如果$\overline{U}$超过此极限值，则不仅吸积停止，而且还应有恒星大气包层的向外膨胀运动. 利用辐射场能密度和恒星光度间的熟知关系式：

$$\overline{U}=\frac{L}{4\pi r^2c},$$

则吸积过程中产生的最大光度应是

$$L_{\max}=\frac{4\pi GMm_pc}{\sigma_T}\simeq1\times10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\quad(\mathrm{erg/s}),\qquad(5.12)$$

这就是恒星光度的爱丁顿极限.

§ 5.4 逆康普顿散射

5.4.1 作为辐射过程的逆康普顿散射

康普顿散射是静止电子与光子的碰撞过程，现讨论一运动的电子和光子的碰撞. 与康普顿散射一样，首先求散射光子的频率 ν 与入射光子频率 ν_i 关系. 推导办法也相同，即利用能量和动量守恒定律. 但与康普顿散射不同之处是，这一关系式的推导现在遇到了困难，因为自由电子一开始就不是静止的. 解决办法仍是通过洛伦兹变换，即先在与电子一起运动的"电子静止系"S'中观察电子和光子的碰撞. 在这一参考系中康普顿公式(5.7)成立. 再通过洛伦兹变换由电子静止系 S' 回到实验室系 S，就可由(5.7)式导出在实验室系 S 中的 ν-ν_i 关系. 图 5.2(a)，(b)分别画出在实验室系 S 中以及在电子静止系 S' 中的碰撞过程图.

图 5.2(a)中，$h\nu_i$ 为入射光子能量，$h\nu$ 为反冲(散射)光子能量，ψ_i 为入射光子方向与电子速度方向之夹角，ψ 为反冲光子方向与电子速度方向夹角，θ 为入射光子与反冲光子方向间之夹角(即散射角).

图 5.2(b)中各符号的意义相同，只是加上"′"号，表示相应的量是在电子静止系 S' 中测量的.

在静止系 S' 中，康普顿公式成立，即

$$h\nu' = \frac{h\nu_i'}{1+\frac{h\nu_i'}{m_0c^2}(1-\cos\theta')}. \tag{5.7′}$$

若要从电子静止系 S' 回到实验室系 S，则需用到以下的变换关系，它们都是相对论中常见的公式：

$$h\nu_i' = \gamma h\nu_i(1-\beta\cos\psi_i),$$

$$h\nu = \gamma h\nu'(1+\beta\cos\psi'),$$

$$\mathrm{tg}\psi_i' = \frac{\sin\psi_i}{\gamma(\cos\psi_i-\beta)}, \tag{5.13}$$

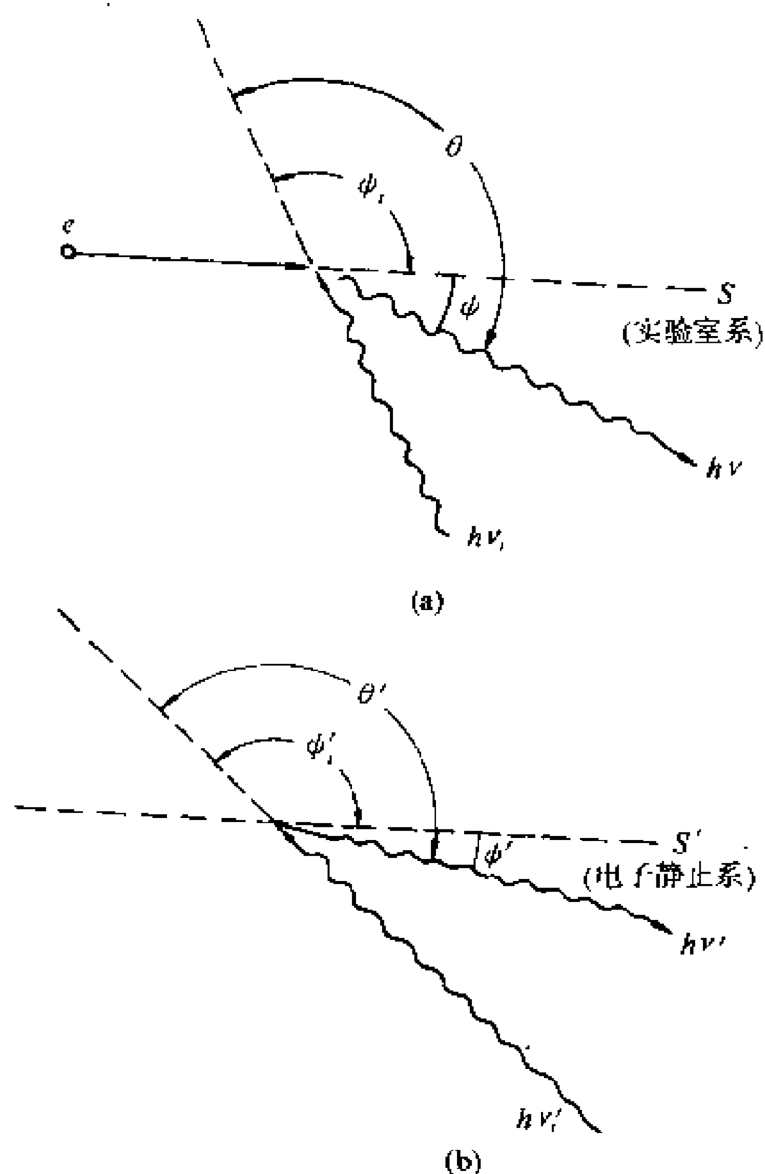


图 5-2

$$\mathrm{tg}\psi'=\frac{\sin\psi}{\gamma(\cos\psi-\beta)}.$$

(5.13)第一式是从实验室系 S 过渡到电子系 S' 时，关于入射光频率的变换公式；而第二式则是从电子系 S' 过渡到实验室系 S 时，关于散射光频率的变换公式(两式都是多普勒效应的相对论公式，只是前者是由 $S\to S'$，后者则是由 $S'\to S$). 第三、第四式则分别是由 $S\to S'$ 时，入射光及散射光方向的变换公式(即"光行差现

象”)．

将(5.13)第一、第二两式代入(5.7′)中，得到

$$h\nu=\frac{\gamma^2 h\nu_i(1-\beta\cos\phi_i)(1+\beta\cos\psi')}{1+\frac{\gamma h\nu_i}{m_0c^2}(1-\beta\cos\phi_i)(1-\cos\theta')}. \tag{5.14}$$

此即在实验室系 S 中关于散射光频率 ν 与入射光频率 ν_i 之间的普遍关系式，可以看作康普顿公式(5.7)在电子运动情况下的推广．不论电子在碰撞前是静止抑或运动，该式都成立．显然，在实验室系 S 中，如果自由电子碰前是静止的，$v=0$(亦即 $\beta=0$)，因而 $\gamma\simeq1$，则上式回到康普顿公式(5.7)．如果还进一步满足条件 $h\nu_i\ll m_0c^2$，则(5.14)式给出 $\nu\simeq\nu_i$，即回到经典的汤姆孙散射情况．

但是，现在感兴趣的是另一个极端情况——电子碰前非但不静止，而且还以相对论性速度运动，即考虑相对论电子与光子的碰撞．这同样导致复杂公式(5.14)式的简化．这是由于电子速度 $\beta\simeq1$，无量纲的能量值 $\gamma\gg1$．现在假定，尽管 γ 很大，但仍满足条件 $\gamma h\nu_i\ll m_0c^2$(这并不是很难达到的条件，已知电子静能 $m_0c^2\simeq0.5$MeV，假如电子的 $\gamma\simeq100$，则对于射电波段，可见光甚至 X 射线波段的光子，以上不等式都能满足)．这时(5.14)式将得到简化，并导出一个有兴趣的结果——碰撞引起相对论电子的辐射．

首先讨论与相对论电子碰撞后光子的散射方向问题．由(5.13)第三式可见，不管入射光子方向如何(即不管 ϕ_i 取何值，ϕ_i 可在 $0-\pi$ 中随机取值)，由于 $\gamma\gg1$，所以 $\text{tg}\psi'_i\to0^-$(即从小于零的方向接近于零)．因此，$\psi'_i\simeq\pi$，即在电子静止系中观察碰撞时，入射光子方向总和电子运动方向相反，光子是“迎面”撞来的(我们放弃另一个可能的数学解 $\psi'_i\simeq0^-$，因为 ψ'_i 限制在 $0-\pi$ 范围中，并且 $\text{tg}\,\psi'_i<0$)．

(5.13)第四式的逆公式是

$$\text{tg}\psi=\frac{\sin\psi'}{\gamma(\cos\psi'+\beta)},$$

$\gamma\gg1$，因此 $\psi\simeq0$，即在实验室系 S 中观察碰撞时，散射光子总是大

体上沿着电子运动方向射出的，具有很强的方向性.

因此，当高速电子在辐射场中穿行时，将不断与光子碰撞；尽管入射光子可以有各种方向，但遭电子碰撞后，反冲光子总是大体上沿着电子运动的方向抛出.

其次讨论碰撞后散射光子能量的变化问题. 由于 $\beta\simeq 1$，$\gamma h\nu_i/m_0c^2\ll 1$，所以(5.14)式可简化为

$$h\nu\simeq\gamma^2 h\nu_i(1-\cos\phi_i)(1+\cos\phi').$$

因此，$h\nu$ 值的变动范围是 $0—4\gamma^2 h\nu_i$，粗略地说有

$$h\nu\simeq\gamma^2 h\nu_i. \tag{5.15}$$

这表明，在与相对论电子碰撞后，光子能量有可能为原来的 γ^2 倍！而电子则因碰撞而损失了部分动能. 这一结果和康普顿散射正好相反(见本章§2)，故称为逆康普顿散射. 由于这一散射，当高能电子在辐射场中穿行，因而不断和光子发生碰撞的过程中，将使每个受碰撞的光子能量增大约 γ^2 倍，并且沿电子速度方向抛出.

总之，由于逆康普顿散射效应，使辐射场中的相对论电子不断向前方辐射，这一辐射的特点是有着尖锐的方向性，并且辐射频率可以达到非常高的数值. 因此，这一机制在 X 射线天文学和 γ 射线天文学中受到了重视. 例如，用宇宙线电子和微波背景辐射的相互作用来解释弥漫的宇宙 X 射线背景辐射.

这里指出，虽然我们是从康普顿散射公式(5.7′)出发，引出逆康普顿散射的一般特征(5.15)式的. 但这并不表示逆康普顿散射和光子的量子行为有必然的联系. 事实上，如果我们不从量子公式(5.7′)出发，而一开始就根据经典散射观念 $\nu\simeq\nu_i$，即经典的汤姆孙散射，同样可通过洛伦兹变换，引出结论(5.15)式.

5.4.2 逆康普顿散射的辐射功率

对于一个能量为 γ 的相对论性电子，我们要问：单位时间中由于逆康普顿散射而损失的能量为多少？即求辐射功率.

可先作一个粗略的计算. 前面已经说过，电子相当于横截面积

为 $\sigma_T=\frac{8\pi}{3}\gamma_0^2$ 的不透明的球，所以当它在能量密度为 U_{ph}的辐射场（"光子气"）中穿行时，单位时间和光子的碰撞频率应为

$$N=\sigma_T c\frac{U_{ph}}{h\nu},$$

$h\nu$ 是辐射场中光子的平均能量. $\bar{n}=\frac{U_{ph}}{h\nu}$代表平均的光子密度，而每碰撞一次将使电子损失能量$\simeq\gamma^2h\nu$. 因此，单位时间中电子的能耗为

$$P\simeq\gamma^2h\nu\sigma_T c\frac{U_{ph}}{h\nu}=\gamma^2\sigma_T cU_{ph}. \tag{5.16}$$

可见，当电子能量（以洛伦兹因子 γ 表征）增加时，功耗增大. 同时，这一功率同辐射场能量密度 U_{ph}成正比. 严格计算结果与(5.16)式几乎相同，只是多了一个 4/3 的因子. 现推导如下：

推导中要用到几个量的洛伦兹变换. 从实验室系 S 过渡到电子静止系 S'，时间的变换（即爱因斯坦延缓效应）为

$$dt'=\frac{dt}{\gamma}, \tag{5.17}$$

频率的变换（多普勒效应）为

$$\nu'=\gamma\nu(1-\beta\cos\theta), \tag{5.18}$$

θ 为光传播方向和电子速度方向的夹角. θ 角的变换（即光行差公式）为

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}. \tag{5.19}$$

由上式还可导出围绕光传播方向（与电子运动方向成 θ 角）的小立体角元 $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ 的变换为

$$d\Omega'=d\Omega\frac{1}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}. \tag{5.20}$$

(5.20)式的证明并不困难. 对(5.19)式两边微分得

$$\begin{aligned}-\sin\theta'd\theta'&=\frac{-\sin\theta d\theta}{1-\beta\cos\theta}+\frac{(\cos\theta-\beta)(-\beta\sin\theta d\theta)}{(1-\beta\cos\theta)^2}\\&=-\sin\theta d\theta\left[\frac{1-\beta\cos\theta+\beta\cos\theta-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right]\end{aligned}$$

$$= -\sin\theta d\theta \frac{1}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2},$$

又有 $d\varphi' = d\varphi$. 因此

$$\sin\theta' d\theta' d\varphi' = \sin\theta d\theta d\varphi \frac{1}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2},$$

这就证明了(5.20)式.

最后，还需要强度 I_ν 的变换公式. I_ν 即单位时间，单位频率间隔，沿着围绕光传播方向的单位立体角，穿过垂直于光传播方向的单位面积的光波能量. 如果小面元 $d\sigma$ 法向和光线方向成 θ 角，则 $d\sigma_\perp = d\sigma\cos\theta$. 因此，在时间 dt 中，频率为 ν—$\nu+d\nu$ 的光波，沿立体角 $d\Omega$ 穿过 $d\sigma$ 面元的能量为 $dW = I_\nu\cos\theta d\sigma d\Omega dt d\nu$，或者穿过的光子数为

$$dn = \frac{I_\nu}{h\nu}\cos\theta d\sigma d\Omega d\nu dt.$$

在电子静止参考系中，截面 $d\sigma'$ 是不动的，到达 $d\sigma'$ 的光子数为

$$\frac{1}{h\nu'} I'_\nu \cos\theta' d\sigma' d\Omega' d\nu' dt'. \qquad (5.21)$$

在实验室系中去看，如果面元 $d\sigma$ 不动，则到达 $d\sigma$ 的光子数仍如上式，只需将所有量去掉"′"号即可. 但实际上截面 $d\sigma$ 随着电子一起运动，故在实验室系 S 中，到达 $d\sigma$ 面的光子数要小了 $\frac{\cos\theta-\beta}{\cos\theta}$ 倍(见下页的说明)，即在 S 系中去看，dt 时间中到达的光子数应为

$$\frac{\cos\theta-\beta}{\cos\theta}\left(\frac{I_\nu}{h\nu}\cos\theta d\sigma d\Omega d\nu dt\right). \qquad (5.22)$$

它和(5.21)式应当相等，因为散射光子的数目自然是个洛伦兹不变量，因此

$$\frac{\cos\theta-\beta}{\cos\theta}\left(\frac{I_\nu}{h\nu}\cos\theta d\sigma d\Omega d\nu dt\right) = \frac{I'_\nu}{h\nu'}\cos\theta' d\sigma' d\Omega' d\nu' dt'.$$

记住，$d\sigma$ 面元和速度 β 是垂直的，所以面积不会由于运动而改变，$d\sigma' = d\sigma$. 将(5.17)，(5.18)，(5.19)，(5.20)代入上式中，即

得

$$I'_\nu = I_\nu \gamma^3 (1-\beta\cos\theta)^3, \tag{5.23}$$

此即所求的关于强度 I_ν 的变换公式.①

现在可以推导逆康普顿散射的辐射功率了. 所谓求功率,实质上就是求单位时间内电子和多少光子发生碰撞,每碰一次带走多少能量. 这一计算的困难在于:入射的光子可能有各种不同的频率 ν_i 和不同的方向 ψ_i,过份地杂乱. 因此,最好先将入射光按方向频率加以"分类". 首先考虑沿与电子速度方向成 ψ_i 角传播的、频率为 ν_i—$\nu_i+d\nu_i$ 的单色定向入射光束,设其强度为 $I(\nu_i,\psi_i)$. 考查这一束单色、定向光子流被电子散射时带走了多少能量,再对所有可能的 ν_i,ψ_i 值求和,就得到电子的康普顿辐射功率.

但电子与这一单色、定向光子流的碰撞情况还嫌复杂,因为碰后的光子可能以各种散射方向 ψ 飞出,从而碰后的光子频率(因而能量)各不相同. 最好做法是进一步地"细分类",即不仅考虑电子与方向 ψ_i、频率 ν_i 的单色定向光子束流的碰撞,还要指定碰后光子的散射方向. 计算这种指定的散射数目,需要微分散射截面的知

---

① 这里需要说明,为什么面元 $d\sigma$ 沿电子速度方向 β 运动,会使到达 $d\sigma$ 的光子数少了 $\frac{\cos\theta-\beta}{\cos\theta}$ 倍. 如图 5.3 所示,面元 $d\sigma$ 垂直于电子速度 $\boldsymbol{v}$,并以 $\boldsymbol{v}$ 随电子运动. 光线沿着与 $\boldsymbol{v}$ 成 θ 角方向到达面元. 假如 $d\sigma$ 静止,则单位时间里沿 θ 方向的入射光子穿过 $d\sigma$ 面的数目应等于以 $d\sigma$ 面为底,以 $c\cos\theta$ 为高的斜柱体中的光子数目 $nd\sigma c\cos\theta$,n 为光子数密度. 当 $d\sigma$ 以 $\boldsymbol{v}$ 运动时,则在实验室系 S 中去看,光沿 $\boldsymbol{v}$ 方向相对于 $d\sigma$ 的速度不再是 $c\cos\theta$,而是 $c\cos\theta-v$,即斜柱体体积减少为 $d\sigma(c\cos\theta-v)$. 因此,到达 $d\sigma$ 的光子数减少了 $\frac{\cos\theta-\beta}{\cos\theta}$ 倍.

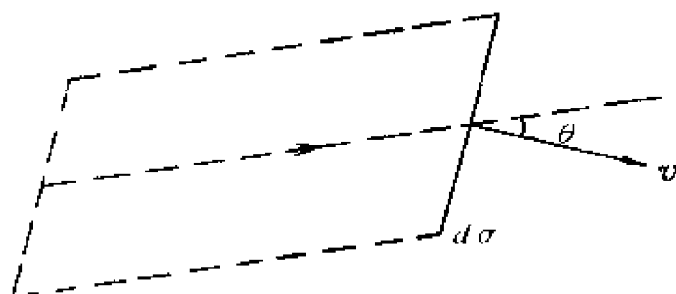


图 5.3

识，因此，最好是在电子静止系 S' 进行这种计算；因为只有在 S' 系中，微分截面是已知的[参见公式(5.5)].

总之，计算方法的要点是，首先考虑单色定向入射束；再考查其中具有指定散射方向的碰撞；最后，计算的参考系应选在电子静止系 S' 中. 在 S' 系中，应把上述单色定向的光子流方向和频率分别记为 ψ'_i 及 $\nu'_i—\nu'_i+d\nu'_i$. 强度则改记为 $I'(\nu'_i,\psi'_i)$. 因此，在 dt' 时间中，沿着围绕 ψ'_i 方向的立体角元 $d\Omega'_i$ 传播的光子穿过垂直于光线的单位面积的数目为

$$\frac{I'(\nu'_i,\psi'_i)}{h\nu'_i}d\nu'_i d\Omega'_i dt'.$$

已知静止电子的微分散射截面为(5.5)式，

$$\sigma(\theta')=\frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta').$$

因此，dt' 时间内入射光子被散射到立体角元 $2\pi\sin\theta' d\theta'$ 的数目为(θ' 是光子散射角)

$$\frac{2\pi I'(\nu'_i,\psi'_i)}{h\nu'_i}\sigma(\theta')\sin\theta' d\theta' d\Omega'_i d\nu'_i dt'. \qquad (5.24)$$

注意，散射次数应当是洛伦兹不变的，只是在两个参考系 S，S' 中完成这些次数的散射所需的时间不同而已. 因此，现在有可能回到实验室系 S 中考虑散射.

将变换式(5.17)、(5.18)，(5.20)以及(5.23)代入(5.24)式，得到

$$2\pi\frac{I(\nu_i,\psi_i)}{h\nu_i}\sigma(\theta')\sin\theta' d\theta' d\Omega_i d\nu_i dt(1-\beta\cos\psi_i). \qquad (5.24')$$

(5.24')式表示，在实验室系 S 中 dt 时间内散射到 θ' 到 $\theta'+d\theta'$ 中的光子数目，这些光子的入射频率和方向为 ν_i 及 ψ_i. 注意，这里的散射角 θ' 仍为在电子系 S' 中的值.

每个被散射到 θ' 方向的光子的能量应为[见(5.14)式，假定 $\gamma h\nu_i \ll m_0c^2$]

$$\begin{aligned}h\nu &\simeq \gamma^2 h\nu_i(1-\beta\cos\psi_i)(1+\beta\cos\psi')\\ &=\gamma^2 h\nu_i(1-\beta\cos\psi_i)(1+\beta\cos(\theta'-\psi'_i)),\end{aligned}$$

这里利用了关系 $\psi' = \theta' - \psi'_i$ [见图 5.2(b)，一般而言，仅当图中散射角 ψ'，入射角 ψ'_i 在同一平面上时，关系式 $\psi' = \theta' - \psi'_i$ 才是对的，如图 5.2(b)所示. 好在 S' 系中，已知恒有 $\psi'_i \simeq \pi$，因此，S' 系中这一关系总是对的，总有 $\cos\psi' = \cos(\theta' - \psi'_i)$ 成立].

将(5.24′)式乘以每个散射光子能量 $h\nu$，即得 dt 时间内指定散射方向的散射能量为

$$
\begin{aligned}
dW &= 2\pi\left(\frac{\nu}{\nu_i}\right) I(\nu_i, \psi_i)\sigma(\theta')\sin\theta' d\theta' d\Omega_i d\nu_i dt (1 - \beta\cos\psi_i) \\
&= 2\pi\gamma^2(1 - \beta\cos\psi_i)^2(1 + \beta\cos(\theta' - \psi'_i)) \\
&\quad \cdot I(\nu_i, \psi_i)\sigma(\theta')\sin\theta' d\theta' d\Omega_i d\nu_i dt.
\end{aligned}
$$

考虑到 $\sigma(\theta') = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2\theta')$，并对全部散射角 θ' 及对全部入射频率成分 ν_i 积分，就得到电子对于沿 ψ_i 角入射的定向光束的总散射功率

$$
\begin{aligned}
dP(\psi_i) &= \int \frac{dW}{dt} = \pi r_0^2 \gamma^2 (1 - \beta\cos\psi_i)^2 \\
&\quad \cdot \int_0^\pi (1 + \beta\cos(\theta' - \psi'_i))(1 + \cos^2\theta') \\
&\quad \cdot \sin\theta' d\theta' \left[\int_0^\infty I(\nu_i, \psi_i) d\nu_i\right] d\Omega_i \\
&= \pi r_0^2 \gamma^2 (1 - \beta\cos\psi_i)^2 I(\psi_i) d\Omega_i \\
&\quad \cdot \int_0^\pi (1 + \beta\cos(\theta' - \psi'_i)) \cdot (1 + \cos^2\theta')\sin\theta' d\theta',
\end{aligned}
$$

式中 $I(\psi_i) = \int_0^\infty I(\nu_i, \psi_i) d\nu_i$ 代表沿 ψ_i 角入射的光子束的总强度.

再考虑到本节一开始所指出的，对于相对论电子而言，入射光在电子静止系 S' 中的角度 $\psi'_i \simeq \pi$(“面对面”碰撞)，因此上式对 θ' 的积分容易完成，从而有(注意被积式中 $\beta \simeq 1$)

$$
dP(\psi_i) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 I(\psi_i) \gamma^2 (1 - \beta\cos\psi_i)^2 d\Omega_i; \qquad (5.25)
$$

或者，由于 $\beta \simeq 1$，得到

$$
dP(\psi_i) \simeq \frac{32\pi}{3} r_0^2 I(\psi_i) \gamma^2 \sin^4\frac{\psi_i}{2} d\Omega_i.
$$

对于各向同性辐射场，强度 I 实际上与 ψ_i 无关，

$$I=\frac{cU_{\rm ph}}{4\pi},$$

完成对立体角 $d\Omega_i=2\pi\sin\psi_i d\psi_i$ 的积分，即得电子的总散射功率为

$$p_{\rm comp}=\frac{32\pi}{9}r_0^2 cU_{\rm ph}\gamma^2\simeq 2.6\times 10^{-14}U_{\rm ph}\gamma^2 \quad ({\rm erg/s}). \quad (5.26)$$

可见，严格计算的结果只比(5.16)式给出的粗估值多出一个$\frac{4}{3}$的因子. 回忆(4.24)式，电子的同步辐射功率为

$$P_{sy}=1.1\times 10^{-15}\gamma^2 B^2\beta^2\simeq 2.5\times 10^{-14}U_B\gamma^2 \quad ({\rm erg/s}),$$

其中$U_B=\frac{B^2}{8\pi}$代表磁场能量密度. 可见，电子的康普顿辐射功率公式和同步辐射公式很相似，只是用辐射场能密度 $U_{\rm ph}$代替了 U_B，两种功率的比值为

$$\frac{P_{\rm comp}}{P_{sy}}\simeq\frac{U_{\rm ph}}{U_B}.$$

因此，要判断哪种能耗机制是主要的，只需查看磁场能密度与辐射场能密度之比. 两种辐射公式的相似暗示，两种辐射的实质是相同的.

由逆康普顿散射的辐射功率(5.26)可求出相对论电子的寿命为

$$t_c\simeq\frac{\gamma m_0c^2}{P}\simeq 3\times 10^7/U_{\rm ph}\gamma \quad ({\rm s}). \quad (5.27)$$

对于3K 微波背景辐射，已知$U_{\rm ph}\simeq 10^{-13}{\rm erg/cm^3}$，因此电子寿命很长，即逆康普顿散射对电子的能谱几乎没有影响. 对于类星体，$U_{\rm ph}\simeq 1$. 因此，在这种情况下的逆康普顿散射，有可能是相对论电子的最主要的耗能机制.

最后强调一点，以上公式只对满足以下条件的低频范围适用，即

$$h\nu'_i\simeq\gamma h\nu_i\ll m_0c^2;$$

因为只有这时才可在计算辐射功率时采用汤姆孙散射截面公式

(5.5). 如果是相对论电子与高频光子碰撞，则必须用克莱因-仁科公式给出的微分散射截面公式(5.8).

5.4.3 逆康普顿散射的辐射谱

由(5.14)式已经看出，一个频率为 ν_i 的入射光子，由于其方向 ψ_i 可以在 0～π 中随机取值，因此在与电子碰撞后，散射频率不再是单色的，频率变化范围可以从零一直到 $4\gamma^2\nu_i$. 现在来求相对论电子和辐射场中各种方向入射的光子碰撞后散射光的谱分布.

求谱功率的办法和上节完全类似. 首先求单位时间内，沿 ψ_i—$\psi_i+d\psi_i$ 方向入射的，频率为 ν_i—$\nu_i+d\nu_i$ 的单色定向光子束遭到电子散射后，频率为 ν 的散射光子带走的能量 $dP(\nu,\nu_i,\psi_i)$. 也和上节一样，为了能够引用静止电子的微分散射截面公式(5.5)，应该先在电子静止系 S' 中完成 $dP(\nu',\nu'_i,\psi'_i)$ 的计算，而后通过洛伦兹变换回到实验室系 S 中，求出在 S 系中的 $dP(\nu,\nu_i,\psi_i)$. 完成对各种入射光频率 ν_i 及各种方向 ψ_i 的积分，即可定出所求的谱功率 $P(\nu)$. 对于 $\gamma\gg1$ 的相对论电子，假定辐射场又是各向同性的，得到的结果是(详见 Blumenthol and Gould, *Rev. Mod. Phys.* 42 (1970)237)

$$P(\nu)=8\pi r_0^2ch\int f(\nu/4\gamma^2\nu_i)n_{\mathrm{ph}}(\nu_i)d\nu_i, \tag{5.28}$$

其中

$$\begin{aligned} f(x)&=x+2x^2\ln x+x^2-2x^3, \quad 0<x<1;\\ &=0, \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x>1. \end{aligned}$$

而 $n_{\mathrm{ph}}(\nu_i)$ 代表辐射场单位体积中光子的数密度.

$$f(x)=f\left(\frac{\nu}{4\gamma^2\nu_i}\right)$$

实际上代表电子散射单色入射光(频率为 ν_i)的无量纲的康普顿辐射谱. 其中 x 为辐射频率 ν 与康普顿辐射的最大频率值 $4\gamma^2\nu_i$ 之比，即 x 实质上就是无量纲的辐射频率值. 图 5.4 给出 $f(x)$ 的变化曲线.

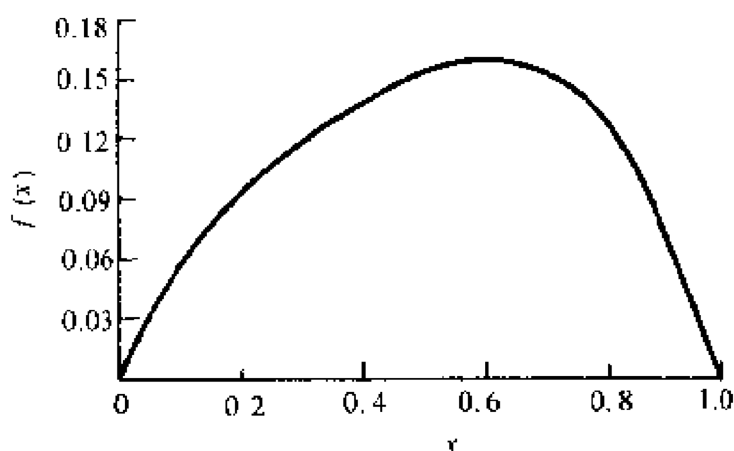


图 5.4

由图可见，在 $x=0.61$ 处，$f(x)$ 达到极值 $f_{max}\simeq 0.16$；在 $\nu\ll\gamma^2\nu_i$ 处，则谱功率 $P(\nu)\propto\nu$，即在低频端没有锐截止现象(除非有低频吸收存在). 从图 5.4 可见，对于给定频率 ν_i 的单色入射光束，康普顿辐射的谱分布是相当弥散的，单色性较差.

5.4.4 电子系集体的康普顿辐射

(5.28)式给出的只是一个能量为 γ 的电子和光子数密度的频率分布为 $n_{ph}(\nu)$ 的各向同性辐射场发生逆康普顿散射作用时的谱. 不难算出单位体积中电子总的谱功率，即谱发射系数. 假定单位体积中能量为 γ—$\gamma+d\gamma$ 的电子数为 $N(\gamma)d\gamma$，则单位体积所有电子总的谱功率为

$$j(\nu)=\int P(\nu)N(\gamma)d\gamma=8\pi r_0^2 chG, \tag{5.29}$$

式中

$$G=\iint N(\gamma)f\left(\frac{\nu}{4\gamma^2\nu_i}\right)n_{ph}(\nu_i)d\nu_i d\gamma. \tag{5.30}$$

与讨论同步辐射时一样，仍然假定电子具有幂律能谱

$$N(\gamma)=N\gamma^{-n}\quad(\gamma_1<\gamma<\gamma_2),$$

则可完成对(5.30)式的积分. 可以先固定 ν_i 值，完成对 γ 的积分，再对 ν_i 积分. 这里应注意(5.30)式对 γ 的积分下限问题. 由于当 x

$=\frac{\nu}{4\gamma^2\nu_i}>1$ 时，被积式中 $f(x)=0$，所以必须 $\gamma^2\geqslant\frac{\nu}{4\nu_i}$，或者说 $\gamma\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}}$ 时，被积函数才不为零，即由 $f(x)$ 的函数特点，γ 的下限应取 $\gamma_{\min}=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}}$. 但由电子能谱的特点，下限应取 γ_1. 因此，在作(5.30)式对 γ 的积分时，下限应取 γ_1 和 $\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}}$ 中较大的一个. 由于我们实际关心的是辐射频率 ν 较高的辐射，$\nu\gg\nu_i$，因此总有 $\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}}\gg\gamma_1$，下限应取 $\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}}$.

若进一步假定 $\gamma_2\gg\gamma_1$，则应考虑到被积函数中 $N(\gamma)$ 的幂律形式. 上限 γ_2 可以近似地用无穷大代替之，即 $\gamma_2\to\infty$. 最后得到的结果为

$$j(\nu)=\pi r_0^2 chN2^{n+3}\frac{n^2+4n+11}{(n+3)^2(n+1)(n+5)}\nu^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\cdot\int\nu_i^{\frac{n-1}{2}}n_{\mathrm{ph}}(\nu_i)d\nu_i. \tag{5.31}$$

(5.31)式即所求的康普顿辐射的谱发射系数，它适用于远离低频端的高频段，即 $\nu\gg\nu_i$. 由(5.31)式可见，与同步辐射谱类似，当电子本身具有 $N(\gamma)\propto\gamma^{-n}$ 的幂律能谱时，康普顿辐射谱也是幂律形式的，谱指数是 $(n-1)/2$，与同步辐射谱相同.

如果知道了辐射场光子数密度 $n_{ph}(\nu)$ 的谱分布，则可完成(5.31)式中对 ν_i 的积分. 例如，假定初始的辐射场具有黑体谱，则

$$n_{\mathrm{ph}}(\nu_i)d\nu_i=\frac{U_{\mathrm{ph}}(\nu_i)d\nu_i}{h\nu_i}=\frac{8\pi\nu_i^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}}-1}d\nu_i,$$

式中 $U_{\mathrm{ph}}(\nu_i)$ 是辐射场能密度. 代入(5.31)式得到

$$j(\nu)=\frac{2r_0^2}{h^2c^2}b(n)N(kT)^3\left(\frac{kT}{h\nu}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$=4.2\times10^{-40}Nb(n)T^3\cdot\left(\frac{2.1\times10^{10}T}{\nu}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$(\mathrm{erg}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{cm}^{-3}\cdot\mathrm{Hz}^{-1}). \tag{5.32}$$

此处

$$b(n)=\frac{2^{n+3}(n^2+4n+11)\Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right)\zeta\left(\frac{n+5}{2}\right)}{(n+3)^2(n+1)(n+5)},$$

$\zeta(x)$是黎曼ζ函数.

$b(n)$值列于下表：

n	0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
$b(n)$	3.48	3.20	3.91	5.25	7.57	11.54	30.62	92.90

另一个可能的情况是，周围的辐射场不具有黑体辐射谱，而是幂律形式的非热谱，

$$n_{\mathrm{ph}}(\nu_i)=n_0\nu_i^{-p}\quad(\nu_a<\nu_i<\nu_b),$$

则在(5.30)式中，可以先完成对ν_i的积分. 同样，根据函数$f(x)$的特点(当$x>1$时，$f(x)=0$)，积分下限应以$\frac{\nu}{4\gamma^2}$代替ν_a，上限近似地用无穷大代替ν_b，得到的结果是

$$j(\nu)=2^{2p+1}\pi r_0^2chn_0\nu^{-p+1}\left[\frac{1}{P}-\frac{2}{P+2}+\frac{P-1}{(P+1)^2}\right]\cdot\int\gamma^{2p-2}N(\gamma)d\gamma, \tag{5.33}$$

即康普顿辐射谱仍然保持了幂律形式$j(\nu)\propto\nu^{-p+1}$.

许多活动星系核同时发射幂律谱型的非热射电辐射和X射线辐射. 为了说明这种辐射，常采用同步-自康普顿模型(SSC). 其要点是源内幂律能谱的相对论电子首先由同步辐射机制产生低频射电辐射，而后这些电子又与它们自己产生的射电光子发生逆康普顿散射，产生X射线辐射. 假如同步-自康普顿过程的确在运转，那么它产生的射电和X射线辐射当有很强的相关性，例如两者有相同的幂指数q，两种辐射应有相近的光变时标，两者辐射频段(包括频率的上，下限)的相关性等(参见尤峻汉、谢光中等，“天文学报”(1982)23卷，第4期).

§5.5 强磁场中相对论电子的磁逆康普顿散射

在很强磁场中的相对论电子的逆康普顿散射性质很特殊，和上节讨论的自由电子逆康普顿散射非常不同，值得单列一节讨论。强磁场在天体物理中并不鲜见，例如强磁中子星极区附近的场强可高达 $B\sim10^{12}$Gs。其中相对论电子的运动受到强场约束，只能沿磁力线方向以相对论速度运动。而在垂直 $\boldsymbol{B}$ 方向上，正如 §4.3 开头所说，由于过短的同步辐射寿命，相对论性速度无法维持，只能以 $V_{\perp}\ll c$ 的非相对论速度绕磁力线回转。在电子随行参考系 S' 中（即该 S' 系沿磁力线方向平动速度恰为电子速度平行分量 $V_{/\!/}$）观察，电子将在垂直磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向的平面圆轨道上做非相对论性低速回转，$V'_{\perp}\ll c$。这一特定运动形态（$\beta_{/\!/}\lesssim1$，而 $\beta_{\perp}\ll1$）决定了磁场中相对论电子散射的新特点：散射的共振性质。在随行系 S' 中考察，电子以 $V'_{\perp}\ll c$ 做朗道圆轨道运动，频率是 $\nu_B=\dfrac{eB}{2\pi m_0c}$，当入射光子频率（$S'$ 系中）$\nu'_i=\gamma\nu_i(1-\beta\cos\phi_i)\simeq\gamma\nu_i=\nu_B$ 时（严格说，此处 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_{/\!/}^2}}$），会出现吸收，发生从基态到朗道第一激发态的吸收跃迁。此外，还会以更小跃迁概率产生倍频成分 $2\nu_B$ 的共振吸收。吸收后瞬即产生回到基态的再发射（见 §4.1），从而等效于一次散射。在随行系 S' 中，散射频率 ν' 即由朗道能级间隔决定。由于最大跃迁概率发生在朗道基态 $l=0$ 和第一激发态 $u=1$ 之间，即 $0\rightleftharpoons1$。故可认为，主要散射频率是 $\nu'=\nu'_i=\nu_B$。散射的共振性质决定了有非常大的散射截面。4.1.8 小节中指出，在 $\nu'_i=\nu_B$ 处，截面 $\sigma(\nu_B,\theta)\simeq10^8\sigma_T$（若 $B\sim10^{12}$Gs），即一个强磁场中的相对论电子的逆康普顿截面竟为 10^8 个自由电子截面的总和！足见这是一种效率极高的辐射机制，在高能天体物理中不可小视。在远离共振频率处（$\nu'_i\neq\nu_B$ 或 $\nu'\neq2\nu_B$），该电子的逆康普顿散射自然还存在，但其行为已与无磁场自由相对论电子无异，截面又成为 σ_T（严格说是克莱因-仁科截面 $\sigma_{K.N}$）。相比于共振散射，可以忽略其影响。“共振”

造成的第二个后果是强磁场中相对论电子逆康普顿散射频率极高. 在随行系 S' 中,共振散射频率是 $\nu'=\nu'_r=\nu_B$. 回到实验室系 S,散射频率为 $\nu=\gamma\nu'(1+\beta\cos\psi')\simeq\gamma\nu'=\gamma\nu_B$(见(5.13)式. 若 $B\simeq 10^{12}$ Gs, $h\nu_B\sim 10$keV, 故散射光子能量高达 $h\nu\simeq\gamma h\nu_B\simeq 10$—100MeV(当 $\gamma=10^3$—10^4),辐射出现在典型的高能 γ 射线段. 可以预期它在 γ 射线天文学中的重要性. 我国天文学家如乔国俊,夏晓阳,史天一等在这一方面做了不少有意义的工作(例如参见:X. Y. Xia, G. J. Qiao, X. J. Wu & Y. Q. Hou, *A & A*. **152**, 1985, 93). 由于强磁场中相对论电子逆康普顿散射的共振性质导致的这两个新特点,即高辐射效率和高频率,故人们专门称之为磁逆康普顿散射,以示与自由电子逆康普顿散射的区别. 磁逆康普顿散射还有另外一些有兴趣的特点,例如有很强的定向性(只沿$\boldsymbol{B}$的方向辐射),以及具有回旋辐射特点的偏振特性(沿$\boldsymbol{B}$方向为圆偏振).

讨论磁逆康普顿散射的顺序类似于§5.4 中对自由电子的逆康普顿过程. 首先计算一个能量 γ 的相对论电子在强磁场中穿过"低频"或"软"辐射场区时产生的磁逆康普顿散射的谱功率$\frac{dP^{m.c.}}{d\nu}$和总功率 $P^{m.c.}=\int\frac{dP^{m.c.}}{d\nu}d\nu$. 该辐射场区可以事先给定为黑体辐射场,也可以是一个稀薄等离子体的热轫致辐射场,或者是具有幂律谱形的非热辐射场. 在此基础上,再求大量相对论电子(假定具有幂律能谱 $N(\gamma)=N\gamma^{-n}$)集体的磁逆康普顿散射辐射谱,即求谱发射系数 $j_\nu^{m.c.}$ 和总发射系数 $j^{m.c.}=\int j_\nu^{m.c.}d\nu$, $j_\nu^{m.c.}$ 才是可以和观测比较的宏观量.

理论计算方法也类似于讨论自由电子的普通逆康普顿散射. 要点还是两个:一,做参考系变换,即先在电子随行系 S' 中考察散射. 优点是可以引用 4.1.8 小节中回旋共振散射截面 $\sigma(\nu_r,\theta,\theta')$,直接完成 S' 系中单个电子的散射谱功率和总功率的计算. 再通过参考系的变换 $S'\to S$,回到实验室系 S,求出 S 系中相对论电子磁逆康普顿散射谱功率和总功率. 二,在随行系 S' 中计算散射时,要

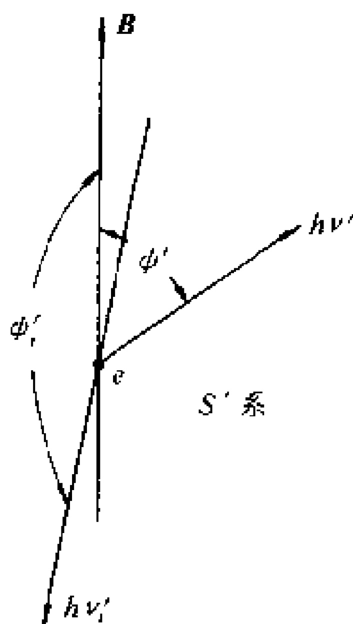


图 5.5　电子随行系 S' 中看散射

“分类”，即把入射光细分成各个单色定向入射束 $I'(\nu'_i, \psi'_i)$. $I'(\nu'_i, \psi'_i)$ 是随行系 S' 中入射角和入射频率分别为 ψ'_i 和 ν'_i 的一束单色定向光的强度. 求此束光的散射，然后对散射光也细分成各单色定向束加以讨论.

在随行系 S' 中考察“静止”电子(该电子只做垂直磁场的朗道圆轨道运动)的散射. dt' 时间内沿围绕入射方向 ψ'_i 的立体角元 $d\Omega'_i$，频率为 $\nu'_i - \nu'_i + d\nu'_i$ 的入射光子穿过垂直于光线方向单位面积光子数是

$$\frac{I'(\nu'_i, \psi'_i)}{h\nu'_i} d\nu'_i d\Omega'_i dt', \tag{5.34}$$

按(4.43)式，随行系 S' 中该“静止”电子总散射截面是

$$\sigma(\nu'_i, \psi'_i) = \frac{1}{2}\pi r_0 c (1 + \cos^2\psi'_i)\varphi(\nu'_i - \nu_B), \tag{4.43}$$

其中 ν'_i，ψ'_i 分表 S' 系中看到的定向单色入射光束的入射频率和入射角(图 5.5). 而 S' 系中微分散射截面则由(4.46)式给出为

$$\sigma(\nu'_i, \psi'_i, \psi') = \left(\frac{3}{32} r_0 c\right)(1 + \cos^2\psi'_i)(1 + \cos^2\psi')\varphi(\nu'_i - \nu_B), \tag{4.46}$$

其中

$$\varphi(\nu'_i - \nu_B) = \frac{\Gamma_{lu}/4\pi^2}{(\nu'_i - \nu_B)^2 + (\Gamma_{lu}/4\pi)^2}, \quad \nu_B \equiv \frac{eB}{2\pi m_0 c}.$$

所以，dt' 中频率 $\nu'_i - \nu'_i + d\nu'_i$，入射角 ψ'_i 的单色定向入射光子被电子散射到立体角元 $d\Omega' = 2\pi \sin\psi' d\psi'$ 中的光子数为

$$\frac{2\pi I'(\nu'_i, \psi'_i)}{h\nu'_i} \sigma(\nu'_i, \psi'_i, \psi_i) \sin\psi' d\psi' d\Omega'_i d\nu'_i dt'$$

$$=\left(\frac{3\pi}{16}r_0c\right)\left(\frac{I'(\nu'_i,\psi'_i)}{h\nu'_i}\right)(1+\cos^2\psi'_i)(1+\cos^2\psi')\varphi(\nu'_i-\nu_B)$$
$$\cdot\sin\psi' d\psi' d\Omega'_i d\nu'_i dt'. \tag{5.35}$$

该式可进一步简化，理由是洛伦兹形状因子 $\varphi(\nu'_i-\nu_B)$ 颇类似于 δ 函数 $\delta(\nu'_i-\nu_B)$，它表示了散射的共振性质. 故可先对 $d\nu'_i$ 积分上式，得到 dt' 中频率在 $\nu'_i\simeq\nu_B\equiv\frac{eB}{2\pi m_0c}$ 的狭窄频段中的入射光子散射到 $\psi'-\psi'+d\psi'$ 中的散射光子数为

$$\left(\frac{3\pi}{16}r_0c\right)(1+\cos^2\psi'_i)(1+\cos^2\psi')$$
$$\cdot\left[\int_0^\infty\frac{I'(\nu'_i,\psi'_i)}{h\nu'_i}\varphi(\nu'_i-\nu_B)d\nu'_i\right]\sin\psi' d\psi' d\Omega'_i dt'$$
$$=\left(\frac{3\pi}{16}r_0c\right)(1+\cos^2\psi'_i)(1+\cos^2\psi')\left(\frac{I'(\nu_B,\psi'_i)}{h\nu_B}\right)$$
$$\cdot\sin\psi' d\psi' d\Omega'_i dt', \tag{5.36}$$

其中用到归一性质 $\int_0^\infty\varphi(\nu'_i-\nu_B)d\nu'_i=1$. 将式中各量 $I'(\nu_B,\psi'_i)$，$d\Omega'_i$，dt' 用实验室系 S 中相应量替换，即用 § 5.4 公式(5.17)，(5.20)，(5.23)将 $d\Omega'_i\to d\Omega_i$，$dt'\to dt$，$I'(\nu_B,\psi'_i)\to I(\nu_i,\psi)$，并且注意到近似有 $(1+\cos^2\psi'_i)\simeq 2$(按光行差公式(5.13)，$S'$ 系中看，入射光方向 $\psi'_i\simeq\pi$，总近于“对头碰”)，则(5.36)式表示为

$$\left(\frac{3\pi}{8}r_0c\right)\left(\frac{1}{h\nu_B}\right)I(\nu_i,\psi_i)(1-\beta\cos\psi_i)(1+\cos^2\psi')\sin\psi' d\psi' d\Omega_i dt. \tag{5.37}$$

(5.37)式即实验室系 S 中看到的 dt 时间内单色定向束 $I(\nu_i,\psi_i)$ 光子流散射到 $\psi'\to\psi'+d\psi'$ 立体角元的光子数目. 注意对于给定的入射束 $I(\nu_i,\psi_i)$，入射方向 ψ_i 确定后，入射频率 ν_i 不是随意取值的. 由共振条件 $\nu'_i\simeq\nu_B$ 及多普勒公式(5.13)：

$$\nu'_i=\gamma\nu_i(1-\beta\cos\psi_i),$$

得到

$$\nu_i=\frac{\nu_B}{\gamma(1-\beta\cos\psi_i)}, \tag{5.38}$$

这是共振散射条件 $\nu'_i=\nu_B$ 在实验室系 S 中的表达式. 它表明,一旦入射方向 ϕ_i 确定,则入射频率 $\nu_i=\nu_i(\phi_i)$ 即被限定,不可随意取值,否则不被吸收. 这和自由电子逆康普顿散射情况很不一样. 后者 ν_i 和 ϕ_i 彼此独立取值.

在求一个能量 γ 的相对论电子的磁逆康普顿散射谱功率之前,不妨先对辐射谱分布做一定性分析. 在随行系 S' 中看散射,由于吸收和再发射主要发生在朗道能级对(0,1)之间,$0 \rightleftharpoons 1$,即主要为基频 ν_B 的散射,散射频率应等于入射频率 ν'_i:

$$\nu'=\nu'_i=\nu_B. \tag{5.39}$$

因此随行系 S' 中,散射频率具有极好单色性,从 S' 系回到 S 系,则实验室中看到的散射频率当为(5.13)式:

$$\nu=\gamma\nu'(1+\beta\cos\psi')\simeq\gamma\nu_B(1+\cos\psi'), \tag{5.40}$$

上式中已近似取 $\beta\simeq1$. 由于 S' 系中散射近于各向同性,(见(4.46)式),散射方向 ψ' 在$(0,\pi)$中取值. 故(5.40)式表示,散射频率当分布于$(0,2\gamma\nu_B)$之间很宽的频段之中,相当弥散. 高频截止 $2\gamma\nu_B$ 数值很大.

但定量计算的谱分布显示(见图 5.6),辐射的单色性仍然相当好. 在 $\nu\simeq2\gamma\nu_B$ 处谱功率有一尖峰. 现定量推导该电子(能量 γ)磁逆康普顿散射的谱功率. 这只需将(5.37)式乘以散射光子能量 $h\nu$ 即可,$h\nu$ 由(5.40)式给出. 于是元功率为

$$\begin{aligned}dP^{m.c.}&=\frac{dW}{dt}\\&=\left(\frac{3\pi}{8}r_0c\right)\left(\frac{h\nu}{h\nu_B}\right)I(\nu_i,\phi_i)(1-\cos\phi_i)(1+\cos^2\psi')\sin\psi'd\psi'd\Omega_i\\&=\left(\frac{3\pi}{8}r_0c\right)\gamma I(\nu_i,\phi_i)(1-\cos\phi_i)(1+\cos^2\psi')(1+\cos\psi')\\&\quad\cdot\sin\psi'd\psi'd\Omega_i.\end{aligned} \tag{5.41}$$

将(5.41)式对全部入射立体角 $d\Omega_i=2\pi\sin\phi_i d\phi_i$ 积分,即得散射频率为 ν(它对应于一确定的散射角 ψ')的磁逆康普顿散射谱功率为

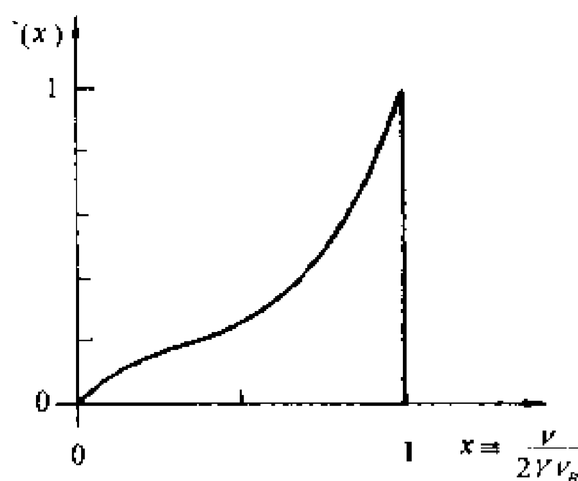


图 5.6　单电子(能量为 γ)的磁逆康普顿散射的无量纲谱形

$f(x)=f(\nu/2\gamma\nu_B)$

$$dP^{m.c.}=\left(\frac{3\pi}{8}r_0c\right)\gamma(1+\cos\psi')(1+\cos^2\psi')\sin\psi'd\psi'$$
$$\cdot\left[2\pi\int_0^{\pi}I(\nu_i,\psi_i)\cdot(1-\cos\psi_i)\sin\psi_i d\psi_i\right].\qquad(5.42)$$

如果辐射场各向同性,则强度 I 不显含 ψ_i,但仍通过 $\nu_i(\psi_i)$ 和 ψ_i 角相关. $I=I(\nu_i)=I(\nu_i(\psi_i))$. 其中 ν_i 满足共振条件(5.38)式,即 $\nu_i=\nu_B\gamma^{-1}(1-\cos\psi_i)^{-1}$(注意 $\beta\simeq1$).

对于给定的辐射场,可以写出 $I(\nu_i)$ 具体形式,并完成积分,记为

$$2\pi\int_0^{\pi}I(\nu_i(\psi_i))(1-\cos\psi_i)\sin\psi_i d\psi_i=A,\qquad(5.43)$$

常数 $A=A(\gamma,\nu_B)$依赖于电子能量 γ 和场强 B. 一般对形式复杂的辐射场(I-ν_i 关系复杂),该积分只能数值计算完成. 如果 $I(\nu_i)$有简单形式,例如幂律形,$I(\nu_i)=c_0\nu_i^{-p}=c_0\nu_B^{-p}\gamma^p(1-\cos\psi_i)^p$,则可以由初等公式完成此积分.

为了由(5.42)式最后求得谱功率对频率的变化关系,需将式中散射角 ψ' 换成散射频率 ν,利用(5.40)式及 $\beta\simeq1$,将散射角余弦 $\cos\psi'$ 表成

$$\cos\psi'=(\gamma^{-1}\nu_B^{-1})\nu-1,\qquad(5.44)$$

定义$\frac{\nu}{2\gamma\nu_B}=\nu/\nu_{max}\equiv x$为以最大散射频率$2\gamma\nu_B$为量度单位的无量纲的散射频率，则

$$\cos\psi'=2x-1, \tag{5.45}$$

于是谱功率(5.42)式表示为

$$dP^{m.c.}=(3\pi r_0c)A(\gamma,\nu_B)\gamma(2x^3-2x^2+x)dx,$$

即

$$\frac{dP^{m.c.}}{dx}=(3\pi r_0c)A(\gamma,\nu_B)\gamma f(x), \tag{5.46}$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-2x^2+x & (当\ 0\leqslant x\leqslant 1)\\ 0 & (当\ x>1)\end{cases}$$

为磁逆康普顿散射无量纲的谱功率谱.

$f(x)\equiv f\left(\frac{\nu}{2\gamma\nu_B}\right)$的谱形见图5.6，与图5.4比较可见单色性较理想. 尽管辐射谱频段非常宽，但在$\nu\simeq 2\gamma\nu_B$处有尖锐的极大.

将$\frac{dP^{m.c.}}{dx}=(2\gamma\nu_B)\frac{dP^{m.c.}}{d\nu}$代入(5.46)式，即得实用形式的磁逆康普顿谱功率：

$$\frac{dP^{m.c.}}{d\nu}=\left(\frac{3\pi r_0c}{2\nu_B}\right)A(\gamma,\nu_B)f\left(\frac{\nu}{2\gamma\nu_B}\right), \tag{5.47}$$

或者

$$\frac{dP^{m.c.}}{d\nu}=\left(\frac{3\pi r_0c}{2}\right)A(\gamma,\nu_B)\left(\frac{eB}{2\pi m_0c}\right)^{-1}f\left(\frac{\nu}{2\gamma\nu_B}\right). \tag{5.48}$$

单个电子的总辐射功率可由(5.46)式对x积分得到，即

$$P^{m.c.}=\int_0^1\frac{dP^{m.c.}}{dx}dx=(\pi r_0c)A(\gamma,B)\gamma. \tag{5.49}$$

最后，仿照§5.4，将(5.47)式对电子能谱$N(\gamma)d\gamma$积分求和，即得单位体积各种能量γ的电子在频率ν处的总的谱功率，即谱发射系数

$$j^{m.c.}(\nu)=\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{dP^{m.c.}}{d\nu}N(\gamma)d\gamma, \tag{5.50}$$

其中 $N(\gamma)\doteq N\gamma^{-n}\quad(\gamma_1\leqslant\gamma\leqslant\gamma_2)$. 计算从略.

§5.6 电子对的湮灭和产生

电子-正电子对在湮灭时产生双光子的过程,从量子电动力学观点看来,它和康普顿散射过程完全类似. 由于量子电动力学的讨论超出本书范围,所以这里只给出天体物理感兴趣的结果,并不加推导. 这一过程是 γ 射线天文学中常见的辐射机制.

为了满足能量守恒和动量守恒定律的要求,自由的电子-正电子对在湮灭过程中必须有两个光子产生. 如果在电子静止参考系中观察湮灭过程,则能量为 γm_0c^2 的正电子和静止电子的湮灭截面为

$$\sigma^{湮灭}=\frac{\pi r_0^2}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\cdot\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1})-\frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right],\tag{5.51}$$

湮灭过程将伴随双光子的产生. 由(5.51)式可见,在能量很低时(即洛伦兹因子 $\gamma\gtrsim1$),$\sigma_{湮灭}$有大值. 在低速极限下

$$\sigma_{湮灭}\simeq\pi r_0^2\left(\frac{v}{c}\right)^{-1}.\tag{5.52}$$

当 $\gamma\to1$,即正电子速度 $v\to0$ 时,截面发散. 但应注意此时湮灭概率 R 仍保持有限. 设电子密度 N_e,则每秒电子对湮灭速率为

$$R=N_e\sigma v\xrightarrow{当\gamma\to1}\pi r_0^2cN_e.\tag{5.53}$$

可见,若不考虑无关紧要的汤姆孙散射截面中的因子 8/3,则电子对湮灭速率和静止电子对光子的汤姆孙散射速率是相同的.

在极端相对论情况下(即正电子能量 $\gamma\gg1$),则(5.51)化为

$$\sigma_{湮灭}=\left(\frac{\pi r_0^2}{\gamma}\right)(\ln2\gamma-1).\tag{5.54}$$

这说明高能正电子的湮灭截面很小. 与极限形式的克莱因-仁科公式(5.10)比较,可见两者很相似.

电子对湮灭时产生的两光子一般不具有相同频率. 极端相对论情况下,向前方射出的光子几乎取走全部正电子能量,而第二个

光子能量只近似有 m_0c^2 的量级，且向后方射出.

由于 $\gamma\gg1$ 的高速正电子的湮灭截面近似为零. 因此，高速正电子在等离子体中的行为看来是：首先通过碰撞电离失去能量，而后再以(5.53)式给出的速率 R 湮灭.

量子电动力学同样给出由 γ 光子产生电子对的理论公式. 要使 γ 光子能够产生电子对，则 γ 光子的能量必须不小于 $2m_0c^2$. 但是，单独一个光子即使有足够能量也不能产生电子对，为了保证电子-正电子对产生过程能够满足能量守恒和动量守恒，必须有其它粒子在场，例如核子. 这时将有两种情况可能产生：

1. 入射光子产生电子对，其后电子与核子场作用；
2. 入射光子产生电子对，其后正电子与核子场作用.

核子场中电子-正电子对产生截面的公式相当繁复(例如，参见 A. И. 阿希叶泽尔等著，"量子电动力学"，第五章). 但在极相对论情况下，即光子能量 $h\nu$ 及产生的电子、正电子能量 W_-，W_+ 都远大于 m_0c^2 时，即 $h\nu, W_\pm\gg m_0c^2$，则正电子能量在 W_+—$W_+ + dW_+$ 间隔内形成电子对的截面为

$$\sigma(W_+)dW_+=\left(\frac{4\alpha_f\gamma_0^2Z^2}{h\nu}\right)\left(1-\frac{\frac{4}{3}W_+W_-}{(h\nu)^2}\right)\cdot\left(\ln\frac{2W_+W_-}{h\nu m_0c^2}-\frac{1}{2}\right)dW_+. \tag{5.55}$$

式中 $h\nu$ 为入射光子能量，W_+，W_- 分别为正电子和电子能量. $\alpha_f=\frac{1}{137}$ 是精细结构常数，r_0 是电子经典半径，Z 是核的原子序数. 由(5.55)式可见，产生截面对 W_+，W_- 是对称的.

在推出截面公式(5.55)时，不言而喻地假定了核场是纯库仑场，而完全忽略了原子中电子对核库仑场的屏蔽作用. 量子电动力学证明，只有当满足条件

$$2\alpha_fZ^{\frac{1}{3}}W_+W_-\ll m_0c^2h\nu \tag{5.56}$$

时，这一忽略才是合理的，即(5.55)式只有条件(5.56)得到满足时成立.

对于完全屏蔽情况,即当

$$2\alpha_f Z^{\frac{1}{3}} W_+ W_- \gg m_0 c^2 h\nu \tag{5.57}$$

时,极相对论情况下($W_+, h\nu \gg m_0 c^2$)的电子对产生截面公式应代以

$$\sigma(W_+)dW_+ = \left(\frac{4\alpha_f r_0^2 Z^2}{h\nu}\right)\left\{\left[1-\frac{\frac{4}{3}W_+W_-}{(h\nu)^2}\right]\right.$$
$$\left.\cdot \ln(183Z^{-\frac{1}{3}}) - \frac{W_+W_-}{9(h\nu)^2}\right\}dW_+. \tag{5.58}$$

为求得产生的电子对总数,只需对所有能量W_+积分即可。结果得到在极相对论下不考虑屏蔽的积分截面为

$$\sigma_{对产生} = \alpha_f Z^2 r_0^2 \left(\frac{28}{9}\ln\frac{2h\nu}{m_0 c^2} - \frac{218}{27}\right). \tag{5.59}$$

对于完全屏蔽情况,应为

$$\sigma_{对产生} = \alpha_f Z^2 r_0^2 \frac{28}{9}\left(\ln\frac{183}{Z^{1/3}} - \frac{1}{42}\right). \tag{5.60}$$

与克莱因-仁科公式相比可见,电子对产生是高频光子在等离子体中穿行时损失能量的更重要的原因.

光子产生电子对及轫致辐射是宇宙线中电子-光子级联簇射的原因;例如,能量极高的γ光子(例如,可通过π^0介子的衰变得到)被吸收而产生高能电子对,它们又通过轫致辐射失去部分能量,产生次级γ光子,这些γ光子又产生电子对…….簇射粒子的极大数的量级是

$$N_m \sim \frac{W_0}{30W_c},$$

其中W_0是原始电子或光子的能量.对空气而言,式中的常数$W_c \simeq 155m_0c^2$.

实际上,对于温度很高的热等离子体(例如,$T \gtrsim 10^8$K),其中就有电子对的存在.这些电子对是由高温热激发产生.Zel'dovich和Novikov曾经指出("Relativistic Astrophysics".1971,University of Chicago Press, Chicago),在吸积中子星或黑洞的吸积盘

内缘，就是高温等离子区，处于热平衡. 其中电子对的数密度（也就是正电子数密度）为

$$n_{+}\simeq\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3\left(\frac{kT}{m_e c^2}\right)^{3/2}e^{-m_e c^2/kT}. \tag{5.61}$$

由于电子对的存在，气体的状态方程成为

$$\varepsilon=n(m_p+m_e)c^2+3nkT+2m_e c^2\,\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3\left(\frac{kT}{m_e c^2}\right)^{3/2}e^{-m_e c^2/kT},$$

$$p=2nkT+2kT\,\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3\left(\frac{kT}{m_e c^2}\right)^{3/2}e^{-m_e c^2/kT}, \tag{5.62}$$

其中 p 是压强，ε 是单位体积内能. 显然，内能的第三项就是电子对贡献的静能. 当温度很高时，该项变得很大，足以与第二项 $3nkT$ 相比较. 此时电子对的作用就不能随意忽视，必须考虑. 因此特征的临界温度 T_0 就可由以下等式来估计：

$$aT_0^{3/2}e^{-m_e c^2/kT_0}=3nkT_0=3kT_0 n_\infty(T_0/T_\infty)^{3/2}, \tag{5.63}$$

其中

$$a=\frac{2m_e c^2}{\pi^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3\left(\frac{k}{m_e c^2}\right)^{3/2}\simeq 7\times10^9\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-3}\cdot\mathrm{K}^{-3/2},$$

此处已采用了吸积盘理论中的关系式 $n=n_\infty(T/T_\infty)^{3/2}$，$n_\infty$，$T_\infty$ 是远离吸积星处的气体初始密度和温度，由此求得

$$T_0=[1+0.025\ln(n_\infty T_\infty^{-3/2})]\times1.5\times10^8\mathrm{K}.$$

或利用吸积率表示为(Zel'dovich，1971)：

$$T_0=\left\{1+0.025\ln\left[(M/M_\odot)^{-2}\frac{dM}{dt}\right]\right\}\times1.5\times10^8\mathrm{K}, \tag{5.64}$$

其中 dM/dt 以 $10^{-10}M_\odot \mathrm{a}^{-1}$ 为单位. 由(5.64)可见，温度相当恒定，总是 $T\gtrsim10^8$K，几乎不随吸积率而变化. 这表示电子对的产生将会阻止温度的继续增高. 对处于稳定热平衡的等离子体，要温度达到 $\sim10^9$K 看来十分困难. 但应指出，$\sim10^8$K 温度下，尽管电子对总量很少，但电子对的湮灭对辐射的贡献已很重要. 按(5.61)，(5.64)式，此时数密度仅为(Ramaty R. and Meszaros P. 1981, *Ap. J.*, **250**, 384)

$$n_- = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3\left(\frac{kT_0}{m_e c^2}\right)^{3/2} e^{-m_e c^2/kT_0} = \frac{3kT_0}{2m_e c^2} n \simeq 0.03n. \quad (5.65)$$

按(5.53)式给的湮灭概率 R,可求得电子对湮灭贡献的发射系数为

$$j_a = Rn_+ h\nu_a \simeq n_- n\pi r_0^2 ch\nu_a \simeq 10^{-22} n^2 (\mathrm{erg \cdot s^{-1} \cdot cm^{-3}}). \quad (5.66)$$

而在同一温度 $T \sim 10^8\mathrm{K}$ 下,韧致辐射发射系数约为(Shapiro S. L. ,1973,*Ap. J.* ,**180**,531)

$$j_b \simeq 10^{-22} n^2 \quad (\mathrm{erg \cdot s^{-1} \cdot cm^{-3}}). \quad (5.67)$$

因此在 $T \sim 10^8\mathrm{K}$ 情况下,j_a 和 j_b 是同量级的.

用电子对湮灭发射可以较成功地解释 Cyg X-1 的硬 X 射线连续谱的起源(参见叶忠国,尤峻汉,*Astrophysics and Space Science*, 1985,**109**,155—173).在此密近双星系统中,黑洞吸积盘的内缘温度高达 $10^8\mathrm{K}$,产生电子对湮灭辐射线,又因引力红移,谱线会从~511keV 移至~420keV.当此谱线穿过吸积盘外部较"冷"(~$10^7\mathrm{K}$)区域时,发生康普顿软化.谱线将演化成高能端几乎截止于~400keV 的连续谱.且在~100—200keV 处出现一小"鼓包",它是谱线经康普顿红移后留下的痕迹.这些预言与观测符合得很好.

§5.7 双光子湮灭产生电子对过程

高能天体物理中,电子对湮灭的逆过程——双光子湮灭产生电子对,同样有重要的作用.当能量分别是 $h\nu$ 和 $h\nu'$ 的两光子发生碰撞,并且满足一定能量阈值条件时(见以下(5.82)式),就有可能发生如下双光子湮灭产生电子对的反应,即

$$\gamma + \gamma \to e^{\pm}. \quad (5.68)$$

由量子电动力学理论(QED)计算,可知这一过程的反应截面可与高频 γ 光子-电子康普顿散射截面(克莱因-仁科公式)比较,也可与其逆过程——电子对湮灭截面比较,因而是 γ 射线天文学中一个不可忽视的物理过程.例如在讨论来自某个 γ 辐射源的 γ

光子穿过低频强辐射场区时(这是天体物理中常有的情况,即高频γ辐射源被低频辐射场包围,例如红外辐射场,软X射线辐射场等),光子-光子湮灭会造成γ射线出射强度的显著减弱,甚至消失. 被湮灭的高频光子,其能量沉积于低频辐射场中,将通过所生成的电子对的逆康普顿散射和对的湮灭等过程,转化为较低频的光子簇射.

本书仍只限于给出有用的QED公式及结果的物理讨论,而不加推导. 其实,既然双光子湮灭(5.68)式是电子对湮灭的逆过程,就可避开场论方法的理论推导,而由已知的电子对湮灭截面和细致平衡原理直接引出两光子湮灭的跃迁概率. 得到的结果自然应和直接的QED计算相同.

为了理论处理简便,通常是在两个光子的动量中心参考系S_0(CM-System)中完成双光子湮灭截面的计算. 在此动量中心参考系中,好处是两光子的动量等值而反向,动量和为零. 因而两光子的能量(频率)也相同,而反应后生成的正负电子对的动量和仍应为零. 即有

$$\hbar \boldsymbol{k}_1 = -\hbar \boldsymbol{k}_2 = \hbar \boldsymbol{k}_0, \quad \hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 = \hbar\omega_0$$

以及

$$\boldsymbol{P}_+ = -\boldsymbol{P}_-, \quad E_+ = E_- \quad (\text{动量中心系 } S_0). \tag{5.69}$$

从面生成的正负电子对在S_0系中的速度值$|\beta| = v/c$也彼此相同. 在此动心系S_0中计算的非偏振光子湮灭产生电子对的总截面为(即考虑了生成的电子对所有的出射方向后的双光子湮灭截面)

$$\sigma = \frac{1}{2}\pi r_0^2 (1-\beta^2)\left[(3-\beta^4)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\beta(2-\beta^2)\right] \quad (S_0 \text{ 系中}), \tag{5.70}$$

其中　$\beta \equiv v/c$即动心系S_0中电子(或正电子)的速度.

当然,用反应后的生成物电子对的速度表示光子湮灭截面总嫌间接一些,不够方便. 上式中的σ也可以用湮灭反应前的光子频率ω_0(或能量$\hbar\omega_0$)表示.

已知 $\beta=v/c=\frac{mv}{mc}=\frac{cp}{E_0}$，$E_0$ 为动心系 S_0 中电子（或正电子）的能量 E_-（或 E_-），自然应有 $E_0=\hbar\omega_0$（能量守恒）. 利用相对论能量-动量关系：

$$c^2p^2=E_0^2-m_0^2c^4=(\hbar\omega_0)^2-m_0^2c^4,$$

不难得出

$$\beta=\frac{cp}{E_0}=\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{\hbar\omega_0}\right)^2}. \tag{5.71}$$

将(5.71)代入(5.70)式，就得到用动心系 S_0 中湮灭前光子能量 $\hbar\omega_0$ 表示的双光子湮灭截面，写出来就是

$$\sigma=\pi r_0^2\left(\frac{m_0c^2}{\hbar\omega_0}\right)^2\left\{\left[2+2\left(\frac{m_0c^2}{\hbar\omega_0}\right)^2-\left(\frac{m_0c^2}{\hbar\omega_0}\right)^4\right]\right.$$

$$\left.\cdot\ln\left|\left(\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}\right)^2-1}\right|-\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{\hbar\omega_0}\right)^2}\left[1+\left(\frac{m_0c^2}{\hbar\omega_0}\right)^2\right]\right\}, \tag{5.72}$$

因此在非相对论极限下，$\beta\ll1$　（亦即 $\hbar\omega_0\gtrsim m_0c^2$），应有

$$\sigma_{NR}\simeq\beta\pi r_0^2, \tag{5.73}$$

而在极相对论极限下，$\beta\lesssim1$（即 $\hbar\omega_0\gg m_0c^2$），应当有

$$\sigma_{ER}\simeq\pi r_0^2\left(\frac{m_0c^2}{\hbar\omega_0}\right)^2\left[(2\ln2)\left(\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}\right)-1\right],$$

或者

$$\sigma_{ER}\simeq\pi r_0^2\Gamma^{-2}[2\ln2\Gamma-1], \tag{5.74}$$

其中 $\Gamma\equiv\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}$ 为无量纲光子能量值（S_0 系中）. 由(5.74)可见，高能光子湮灭截面 σ_{ER} 与高能光子可与自由电子的康普顿散射截面公式(5.10)比较. 因此在 γ 射线天文学中，双光子湮灭过程和 γ 光子-电子康普顿散射过程发生的概率确有可比性，不应轻率忽略. (5.72)或(5.73)式表明，双光子湮灭的光子能量阈值当为

$$\hbar\omega_0\geqslant m_0c^2\quad(S_0\text{ 中}). \tag{5.75}$$

由(5.73)和(5.74)式可见，动心系 S_0 中光子能量 $\hbar\omega_0$ 太高或太低，即 $\hbar\omega_0 \gg m_0c^2$ 或 $\hbar\omega_0 \to m_0c^2$ 这两极限情况下，都会使光子-光子湮灭概率减小. 最大湮灭截面对应的光子峰值能量 $\hbar\omega_0$ 应当由(5.72)式对 ω_0 求极限值得到. 粗略地说，是在 $\hbar\omega_0 \gtrsim m_0c^2$ 时湮灭截面最大.

截面公式(5.70)或(5.72)仍然不是 γ 射线天文学中适用的形式，因为它们是在双光子的动量中心参考系中给出的. 但不难由此得到实验室系 S 中的湮灭截面表达式. 可以由相对论证明，此截面是相对论不变量，不随参考系的选择而变化.（证明可参见 А.И. 阿希叶泽尔和 В.Б. 别列斯捷茨基，《量子电动力学》中译本，科学出版社，§2.8 中第 3 小节）. 剩下要做的只是把(5.70)和(5.72)式中的 S_0 系参量 β 或 ω_0 等换成实验室系 S 中的相应量.

若两光子在湮灭前在实验室系 S 中的能量分别记为 $\hbar\omega$ 和 $\hbar\omega'$，动量分别是 $\hbar\boldsymbol{k}$ 和 $\hbar\boldsymbol{k}'$，光子飞行方向 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 夹角为 θ、双光子总动量记为 $\hbar\boldsymbol{K}=\hbar(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')$，如图 5.7(a)所示. 图中 S 系的 x 轴选择得平行于总动量 $\hbar\boldsymbol{K}$. 而在双光子动量中心系 S_0 中，两光子具有相同能量，都是 $\hbar\omega_0$，动量等值反向，分别为 $\hbar\boldsymbol{k}_0$，$-\hbar\boldsymbol{k}_0$(图 5.7(b)). 因此在实验室系 S 中，两个光子的总的能量-动量四矢为

$$\left(\hbar\boldsymbol{K},\frac{i}{c}E\right)=\left(\hbar\boldsymbol{k}+\hbar\boldsymbol{k}',\frac{i}{c}(\hbar\omega+\hbar\omega')\right), \tag{5.76}$$

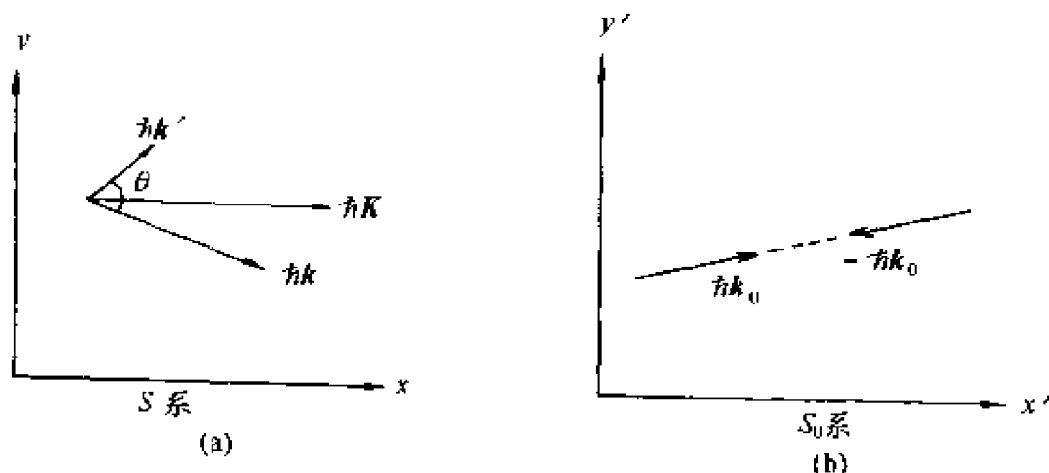


图 5.7

而在动心系 S_0 中,总的能量-动量四矢则为

$$\left(0,\frac{i}{c}E_0\right)=\left(0,\frac{i}{c}2\hbar\omega_0\right). \tag{5.77}$$

两个能-动四矢模值平方($P_\mu P_\mu$)为一不随参考系变换的标量,故由实验室系 S 变换到动心系 S_0 时,有等式:

$$\hbar^2(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')^2-\frac{1}{c^2}(\hbar\omega+\hbar\omega')^2=-\frac{4}{c^2}\hbar^2\omega_0^2, \tag{5.78}$$

再注意关系式

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'=kk'\cos\theta,\hbar k=\frac{\hbar\omega}{c},\quad \hbar k'=\frac{\hbar\omega'}{c}, \tag{5.79}$$

因而由(5.78)和(5.79)式得到

$$\frac{1}{2}\omega\cdot\omega'(1-\cos\theta)=\omega_0^2. \tag{5.80}$$

(5.80)式表明,动心系中光子频率 ω_0(或能量$\hbar\omega_0$)的确可以用实验室系 S 中频率 ω,ω',光子飞行方向的夹角 θ 表示. 从而(5.71)式可以改写为

$$\beta=\sqrt{1-2\frac{m_0c^2}{\hbar\omega}\cdot\frac{m_0c^2}{\hbar\omega'}(1-\cos\theta)^{-1}}, \tag{5.81}$$

将(5.81)式与(5.70)式结合,就给出实验室系 S 中两光子($\hbar\omega,\hbar\omega',\theta$)湮灭的截面表示 $\sigma(\omega,\omega',\theta)$. 在实验室系 S 中,双光子湮灭的能量阈值条件(5.75)变为

$$\hbar\sqrt{\frac{1}{2}\omega\omega'(1-\cos\theta)}\geqslant m_0c^2. \tag{5.82}$$

由(5.82)可见,对于实验室中两个给定光子$\hbar\omega,\hbar\omega'$,如 $\theta=0$ 或 θ 值太小(即两光子同向或近于同向飞行),则不可能发生碰撞湮灭反应. 最小的临界夹角应由

$$\cos\theta_{cr}\leqslant 1-2\frac{m_0c^2}{\hbar\omega}\cdot\frac{m_0c^2}{\hbar\omega'}$$

决定.

θ 角的出现,增加了我们理解上述各公式物理意义的困难. 为了更直观地分析公式意义,建议读者讨论一个特例,$\theta=\pi$,即光子

$\hbar\omega$和$\hbar\omega'$相向飞行，是对头碰撞（显然此时阈值条件(5.82)式最容易满足）.(5.80)式成为

$$\omega\cdot\omega'=\omega_0^2,\tag{5.83}$$

因而能量阈值条件(5.75)或(5.82)成为

$$\hbar\omega\cdot\hbar\omega'\geqslant(m_0c^2)^2\tag{5.84}$$

（注意，不是读者常常误认为的$\hbar\omega+\hbar\omega'\geqslant 2m_0c^2$）. 读者切忌误解阈值条件(5.84)式的含意，以为两个光子的能量$\hbar\omega$和$\hbar\omega'$越大越有利于双光子湮灭反应. 实际上，(5.74)式已表示，当$\Gamma\equiv\frac{\hbar\omega_0}{m_0c^2}=\frac{\hbar\sqrt{\omega\omega'}}{m_0c^2}\gg 1$时，湮灭截面反急剧下降($\sigma\propto\Gamma^{-2}$). 结合(5.84)式和(5.74)式，正确的推论只能是：仅当很高能量的γ光子$\hbar\omega$穿过低频辐射场时($\hbar\omega\gg\hbar\omega'$)，才最有利于发生双光子湮灭反应. 相反，两个能量都很高的γ光子($\hbar\omega'\gg m_0c^2$，以及$\hbar\omega\gg m_0c^2$)碰撞发生湮灭的概率反而非常小，尽管此时阈值条件(5.84)已充分满足. 这就是γ射线天文学中经常讨论γ射线穿过低频辐射场（红外，光学、软X射线场区等等）时的湮灭反应的原因.

θ角的出现当然也增加了利用上述含θ角的普遍公式做数学计算的困难. 为了回避这一困难，常常讨论一个简单然而重要的实际天文问题，即高能γ光子穿过的低频光场具有辐射的各向同性（例如高能γ射线点源被一个广延的球形低频辐射场区包围，场区中每一点的辐射强度值I_ν与方向无关）. 此时θ角将在0—π区间中等概率随机取值. 因此，可对(5.81)式中的β值对θ角取平均值：

$$\overline{\beta}=\frac{\int_{\theta_{cr}}^{\pi}\beta(\theta)2\pi\sin\theta d\theta}{\int_{\theta_{cr}}^{\pi}2\pi\sin\theta d\theta}=\beta(\theta_{mid}),\tag{5.85}$$

θ_{mid}为区间(θ_{cr},π)中的某一中值. 将(5.85)式代入(5.70)式，即得到简化的双光子($\hbar\omega,\hbar\omega'$)湮灭截面公式（对方向θ求平均）：

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{2}\pi r_0^2(1-\bar{\beta}^2)\left[(3-\bar{\beta}^4)\ln\frac{1+\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}}-2\bar{\beta}(2-\bar{\beta}^2)\right]. \quad (5.86)$$

在更粗的近似中，对于各向同性低频光场，公式(5.80)，(5.81)，(5.82)中的 $\cos\theta$ 的平均值可取做

$$\overline{\cos\theta}=\frac{2\pi\int_{\theta_{cr}}^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta}{2\pi\int_{\theta_{cr}}^{\pi}\sin\theta d\theta}\simeq\frac{\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta}=0, \quad (5.87)$$

这相当于说，近似取平均角 $\bar{\theta}\simeq\frac{\pi}{2}$. 于是得到平均角下简化公式：

$$\frac{1}{2}\hbar\omega\cdot\hbar\omega'=(\hbar\omega_0)^2, \quad (5.80')$$

$$\bar{\beta}=\sqrt{1-2\frac{m_0c^2}{\hbar\omega}\cdot\frac{m_0c^2}{\hbar\omega'}}, \quad (5.81')$$

以及简化阈值公式

$$\frac{1}{2}(\hbar\omega)(\hbar\omega')\geqslant(m_0c^2)^2. \quad (5.82')$$

将此简化的平均值 $\bar{\beta}$(5.81′)式代入(5.70)式，得到的湮灭截面 $\bar{\sigma}(\omega,\omega')$ 仍用公式(5.86)表示. 实际计算中，$\bar{\beta}$ 平均值公式(5.85)与(5.81′)没有显著的会影响天文讨论的差别. 建议采用(5.81′)式.

在 γ 射线天文学中，对于各向同性低频辐射场，这些近似公式已足够简单适用. 因此，一个高能 γ 光子 $\hbar\omega$ 穿过平均频率为 $\overline{\omega'}$ 的各向同性辐射场区时每秒被吸收(由于湮灭反应)的概率为

$$\bar{P}=N(\overline{\omega'})\ \bar{\sigma}(\omega,\omega')c, \quad (5.88)$$

其中 $N(\overline{\omega'})$ 表示低频辐射场中平均能量是 $\overline{\hbar\omega'}$ 的光子数密度. $\bar{\sigma}$ 则由(5.86)式给定，其中的 $\bar{\beta}$ 可以用(5.85)式，也可采用(5.81′)式. 而高能 γ 光子 $\hbar\omega$ 在低频光场中的平均自由程则为 $\Lambda=\frac{1}{N(\overline{\omega'})\bar{\sigma}(\omega,\overline{\omega'})}$. 吸收光深则为 $\tau_r=N(\overline{\omega'})\bar{\sigma}(\omega,\omega')L$，$L$ 是低频光场的线度.

作为双光子湮灭反应的天文应用，我们取 Cyg X-3 的高能 γ

射线辐射流量和低能 X 射线辐射的负相关现象为例来说明. 观测表明,Cyg X-3 的软 X 射线辐射存在两种状态——X 射线发射较强的高态和发射较弱的低态. 两者流强相差一个量级左右,同时 Cyg X-3 还是一个著名高能 γ 辐射源. 观测表明,在高态时期,γ 射线流量反而较低;低态时,γ 射线流量明显变大. 这就是 150—5000MeV 能区高频 γ 辐射和 2—12keV 能区低频软 X 射线之间存在的负相关现象. 可以用 X 射线光子场对 γ 射线的吸收过程(湮灭)给予说明. 已经知道,Cyg X-3 是密近双星. 其 X 射线和 γ 射线辐射能源都来自中子星. γ 射线发射区应当更加紧邻中子星表面,类似一个点光源. 其外为一扩展的 X 射线辐射源. γ 射线点光源被此扩展的 X 光子辐射场球区所包围. 当处于 X 射线发射较强的高态时,由于 γ 光子和低频 X 光子的湮灭作用,γ 光子穿出 X 射线球区时遭较强的吸收,使 γ 流量减弱. 而在 X 射线低态时,上述 γ 光子吸收效应明显变弱(详细的定量讨论可参见吴枚,张春生,李惕碚,《天体物理学报》,Vol. 13,No. 4,1993,p. 332,但在他们的考虑中,似乎没有计及与双光子湮灭并存的另一重要物理过程——γ 光子穿过 X 光子场时的康普顿软化).

对于本节给出的双光子湮灭截面的 QED 理论推导,感兴趣的读者可参考以下著作:А. И. 阿西叶泽尔,В. Б. 别列斯捷茨基,《量子电动力学》中译本,科学出版社,1964,或者 Jauch, J. M. and Rohrlich, F. "The Theory of Photons and Electrons" 2nd, Springer-Verlag, New York, 1976.

§5.8 高能光子在强磁场中被吸收转化为正负电子对

在 γ 射线天文学中,还有一种对高能 γ 光子的重要吸收机制. 即高能光子(例如,能量在 $E\approx 10$—100MeV 的 γ 射线光子)穿过强磁场(例如 $B\sim 10^{12}$Gs)时,只要 γ 光子飞行方向与磁场 B 方向间夹角 θ 不是太小,这一斜穿磁场的 γ 光子将以很大概率被磁场吸收,转化成正负电子对. 其吸收系数是(见 Erber, T., Rev. Mod. Phys., 1996, 38, 626)

$$k=\frac{m_0c}{\hbar}\alpha\frac{B\sin\theta}{2B_c}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{8m_0c^2B_c}{3EB\sin\theta}\right]$$

$$=10^6B_{12}\sin\theta\exp\left[-\frac{60}{E_{\mathrm{MeV}}B_{12}\sin\theta}\right]\quad(\mathrm{cm}^{-1}),\tag{5.89}$$

其中 $\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137}$是精细结构常数，$B_c=\frac{m_0^2c^3}{e\hbar}=4.4\times10^{13}\mathrm{Gs}$ 是磁中子星临界磁场，θ 是光子与磁场夹角，E_{MeV}代表以 MeV 为单位的光子能量，B_{12}代表以 $10^{12}\mathrm{Gs}$ 为单位的磁场强度. 可见为了使高能光子顺利穿过强磁场，不被吸收，要求磁场对高能光子光学薄，即

$$kL<1.\tag{5.90}$$

若取 $B_{12}\sin\theta=1$（即 θ 不十分小），$E_{\mathrm{MeV}}=10$，则

$$L<2\times10^{-4}\mathrm{cm}^2,\tag{5.91}$$

即要求磁场"壁厚"仅及 1μm 量级. 许多 γ 辐射爆源的能谱中观测到明显的 $E\geqslant10$MeV 的高能尾巴，这似乎表明，这些 γ 爆源应当没有强磁场区存在. 或者虽有强场区，但 γ 光子飞行方向与磁力线近于平行，$\bar{\theta}\simeq0$. 第三个可能就是 γ 射线和强磁场区不在空间同一区域中（详细分析可参阅，韦大明、陆埮等，天体物理学报，Vol. 13，No. 2，1993，或天文学报，Vol. 35，No. 1，1994）.

陆埮等人在考虑到高能光子在强磁场中转化成电子对的效应后，指出脉冲星极冠区存在着 γ 光子—电子对—次级 γ 光子—次级电子对……的级联过程. 提出光子分"代"的概念及推广的"代参数"观念（代参数可以不是整数. 它是描写大量光子整体性质的物理量），证明代参数与 γ 能谱的谱指数以及 γ 射线总光度之间有定量关联. 并以此预言新的 γ 射线脉冲星的可能候选者. 这一工作已引起国内外同行的兴趣（详见，T. Lu et al., *A & A*, **290**, 1994, 815，韦大明、陆埮，天文学报，Vol. 35，No. 3，1994，231）.

参 考 文 献

[1] Bekefi, G., Radiation Processes in Plasmas, Wiley, New York, 1966.

[2] Blumenthal, G. and Gould. R., *Rev. Mod. Phys.*, **42**(1970), 237.

[3] Bradt, H., Ohashi, T. and Pounds, K.A., X-ray Astronomy. Space Missions, in "Astronomy and Astrophysics Encyclopedia" Ed. S. P. Maran, Reinhold, Van No 5, 954, 1992.

[4] Canuto, V., Lodenquai, J. and Ruderman, M., *Phys. Rev.*, D3 2303, 1971.

[5] Eddington, A., The Internal Constitution of Stars, Cambridge University Press, 1926.

[6] Felten, J. and Morrison, P., *Ap. J.*, **146**(1966), 686.

[7] Felten, J. and Rees, M., *Astro. Ap.*, **17**(1972), 226.

[8] Feynman, R., Quantum Electrodynamies, Benjamin, New York, 1962.

[9] Giacconi, R. and Gursky, H., X-Ray Astronomy, Reidel, Dordrecht, 1974.

[10] Ginzburg, V. and Syrovatskii, S., The Origin of Cosmic Rays, Pergamon, London, 1964.

[11] Gnedin, Y. and Sunyaev, R., *M. N. R. A. S.*, **162**(1973), 53.

[12] Grindlay, J. E., X-ray Astronomy, in "Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics", Academic Press, 765, 1989.

[13] Heitler, W., The Quantum Theory of Radiation, Oxford University Press, London, 1954.

[14] Illarionov, A, and Sunyaev, R., *Sov. Astro.*, **16**(1972), 45.

[15] Jones, F., *Phys. Rev.*, **167**(1968), 1159.

[16] Kats, H., *Ap. J.* **206**(1976), 910.

[17] Longair, M.S., High Enengy Astrophysics, Cambridge, 1992.

[18] Ribicki, G. B. and Lightman A. P., Radiation Processes in Astrophysics, Freeman, Sanfrancisco, 1982.

[19] Shapiro, S.L. and Teukolsky, S. A., Black holes, White dwarfs and Neutron stars: The Physics of Compact Objects, Wiley Interscience, 1983.

[20] Weymann, R., *Phys. Fluids*, **14**(1965), 1701.

[21] Woljer, L., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **10**(1972), 129.

[22] A.И. 阿希叶泽尔, B.Б. 别列斯捷茨基, 量子电动力学, 科学出版社,

1964.

[23] Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D. Relativistic Astrophysics, University of Chicago Press, Chicago, 1971.

第六章　韧致辐射

等离子体中的电子与离子发生近碰撞时，库仑力作用使电子获得加速度，这时电子产生的辐射称为韧致辐射. 对于无磁场的热等离子体，它是一种主要的辐射机制. 在韧致辐射的影响下，热的等离子体将逐渐冷却. 表 6.1 中列出几个被认为有可能是热等离子体韧致辐射的辐射源.

表　6.1

源	辐射频率范围	电子密度(cm^{-3})	温度(K)
太阳耀斑	射电、微波、X 射线	10^{10}	10^{7}
HII 区	射　　电	10—100	10^{5}
猎户星云	射　　电	700	10^{4}
天蝎座 X-1	光学、X 射线	10^{16}	10^{8}
后发星团	X 射线	10^{-3}	10^{8}

这里需要说明一下，为什么只考虑电子-离子碰撞产生的辐射，而不讨论电子-电子碰撞. 这是由于两个具有相同荷质比的粒子(例如两个都是电子)，不会有辐射(偶极辐射). 实际上，对于这样的两个粒子体系，偶极矩为

$$\boldsymbol{d} = \sum_{i=1}^{2} e\boldsymbol{r}_i = \sum_i \left(\frac{e}{m}\right) m\boldsymbol{r}_i = \frac{e}{m}\sum_i m\boldsymbol{r}_i.$$

此时共同的荷质比$\frac{e}{m}$可作为常数提出求和号外，但是 $\sum m\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}\sum_i m$. $\boldsymbol{R}$ 是体系的惯性中心的矢径，因此$\boldsymbol{d}$ 对时间的二阶导数$\ddot{\boldsymbol{d}}$将与体系质心加速度$\ddot{\boldsymbol{R}}$成正比，然而这个加速度却是零，$\ddot{\boldsymbol{R}}=0$，因为两个粒子只受内力(库仑力)作用，因此质心作匀速运动.

再回答一个疑问：为什么不考虑电子和负离子碰撞产生的轫致辐射？这是由于电子和负离子之间是库仑斥力，两离子不可能靠近，从而电子的加速度必然很小，轫致辐射可以忽略.

图 6.1 画出电子在离子的库仑场中运动的示意图. 电子沿双曲线作加速运动的过程中将辐射光子，图中 b 称为电子的瞄准距离，代表电子在远离离子时的直线轨道至离子的垂直距离.

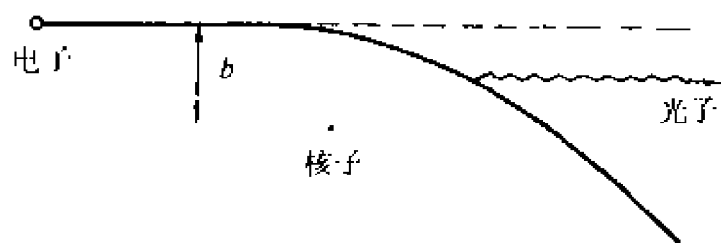


图 6.1

严格地说，电子的轫致辐射是量子过程. 当辐射光子能量 $h\nu$ 可以和热电子能量比较时，就必须用量子理论处理. 在量子理论中，轫致辐射被称为电子的自由-自由跃迁过程，意即每当辐射一个光子时，电子态就发生变化，从一个自由态跃迁到另一个自由态. 但本章仍着重于经典理论分析，对量子理论结果只作简单介绍. 实际计算表明，经典理论结果和量子理论在很大范围里都符合得很好.

在讨论热电子轫致辐射时，仅为了方便，我们将改变一下前两章的叙述顺序——不是先求一个电子的总辐射功率，再求谱功率（见第四、五章）. 而是先求轫致辐射谱功率，再对频率积分，求得总功率.

定量推演一个电子的轫致辐射谱功率之前，仍然以直观的定性讨论为先导. 对一个速度是 v，瞄准距离是 b 的入射到正离子有心力场中的电子（图 6.1），下节将会证明，其主要轫致辐射频率为 $\omega\simeq v/b$（见(6.13)式）. 这大体符合我们的物理直觉：由于轫致辐射光子能量取自热电子动能，可以猜测到，热运动速度 v 大的电子可以产生频率 ω 较高的轫致光子，尽管现在暂无法判定有正比关系 $\omega\propto v$. 而对近距碰撞（即瞄准距 b 值小），电子加速度大，预期有较

大辐射能量.故可粗略地推测，近距散射对应于较高韧致频率 ω. 对于只给定速度 v 的电子，在等离子体中该电子会以各种瞄准距离 b 与正离子相遇. 显然该电子发生远距离碰撞(b 值大)次数多，近距散射(b 值小)次数少. 从而产生的低频光子数目远多于高频光子. 但低频光子能量 $h\nu$ 却远小于高频光子. 因此可以定性推测：一个给定速度 v 的电子，其韧致谱功率 $P(v,\nu)$ 大体上是一个很平的谱，$P(v,\nu)$ 只随频率 ν 做缓慢的变化. 这和下节的定量推导结果(6.20)式一致.

下面对给定参量(v,b)的电子的韧致辐射谱功率做定量推导. 按经典理论，与讨论回旋辐射类似，应该首先给出电子在离子的库仑场中的运动方程；因为要求出韧致辐射的谱分布，必须先知道运动方程.

§6.1　电子运动方程

在电子和离子的碰撞过程中，由于离子的质量大大高于电子，可以认为离子在碰撞中是不动的. 我们所讨论的"碰撞"就是电子在静止离子的有心力场(库仑场)中的运动.

静电库仑场是保守场，电子运动应满足能量守恒定律. 又因为是有心力场，所以电子运动又满足角动量守恒. 因此，可以简单地从两个守恒定律出发，求出电子在离子场中的运动，而不写出二阶牛顿方程.

为明确起见，考虑的是电子和正离子的碰撞(负离子的讨论是完全类似的. 以后将指出，电子与负离子碰撞的韧致辐射是非常弱的，不必予以考虑)，则位能为 $V(r)=-\dfrac{Ze^2}{r}$. 在极坐标(r,φ)中，能量守恒定律表为

$$\frac{m_0}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{Ze^2}{r}=E. \tag{6.1}$$

角动量守恒定律形式为

$$m_0r^2\dot{\varphi}=M. \tag{6.2}$$

式中常数 E,M 分别代表电子的总能量和角动量.

将(6.2)式中的 $\dot{\varphi}$代入(6.1)式,得到

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m_0}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{M^2}{m_0^2r^2}}. \tag{6.3}$$

积分(6.3)式即可求出 $r\sim t$ 关系. 现在我们首先感兴趣的是电子在库仑场中的轨道形状问题,即求 $r\sim\varphi$ 关系. 为此,在(6.1)—(6.3)式中消去时间参量 t,即由(6.3)式得

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m_0}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{M^2}{m_0^2r^2}}}. \tag{6.3'}$$

由(6.2)式

$$d\varphi=\frac{M}{m_0r^2}dt. \tag{6.2'}$$

将(6.3)代入(6.2')式即可消去 t,得到

$$d\varphi=\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m_0\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}}. \tag{6.4}$$

完成(6.4)式的初等积分,可求出

$$\varphi=\arccos\frac{\frac{M}{r}-\frac{m_0Ze^2}{M}}{\sqrt{2m_0E+\frac{m_0^2Z^2e^4}{M^2}}}+\varphi_0. \tag{6.5}$$

(6.5)式即 $r\sim\varphi$ 关系,即电子轨道方程. 适当选择 φ 的计算起点,使常数为零,并引入符号

$$P=\frac{M^2}{m_0Ze^2},\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m_0Z^2e^4}}, \tag{6.6}$$

则(6.5)式化为

$$r=\frac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{6.7}$$

此即熟知的圆锥曲线方程 P 称为半通径,ε 为偏心率,而(6.6)式

给出描写曲线的几何参量 P,ε 和物理参量 M,E 的关系.

由(6.6)式可见,当电子能量 $E<0$ 时,偏心率 $\varepsilon<1$,即电子轨道为椭圆;$E=0$ 时,$\varepsilon=1$,轨道为抛物线;而当 $E>0$ 时,$\varepsilon>1$,轨道为双曲线. 在讨论碰撞问题时,电子能量总大于零,因为电子在无穷远处位能 $V=0$,动能

$$T=\frac{1}{2}mV_{\infty}^{2}>0,$$

因此 $E>0$,从而在碰撞问题中得到双曲线形的轨道如图 6.2 所示. 图中近心点到力心的距离为

$$r_{\min}=\frac{P}{\varepsilon+1}=a(\varepsilon-1),$$

式中的 a 称为双曲线的"半轴",

$$a=\frac{P}{\varepsilon^{2}-1}=\frac{Ze^{2}}{2E}. \tag{6.8}$$

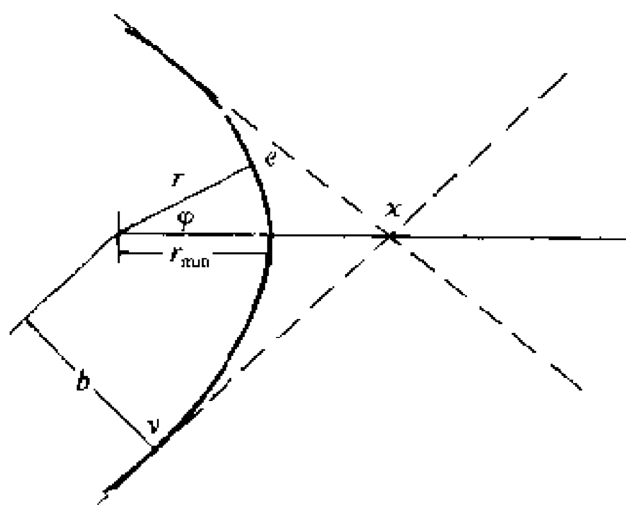


图 6.2

由图可见,上面对 φ 角起点的计算是在规定近心点处 $\varphi=0$ 的前提下进行的.

现在进一步求电子沿双曲线轨道的运动方程. 积分(6.3′)式,有

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m_0}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{M^2}{m_0^2r^2}}}+c$$

$$=\sqrt{\frac{m_0}{2E}}\int\frac{rdr}{\sqrt{r^2+\frac{Ze^2}{E}r-\frac{M^2}{2m_0E}}}+c.$$

如果(6.6)式和(6.8)式引入的双曲轨道的偏心率 ε 和"半轴" a 用来代替上述积分中的物理参量 M,E(即角动量和能量),则运动方程可以表示成极为方便的参数方程形式. 因为由(6.6)式和(6.8)式,我们有

$$t=\sqrt{\frac{m_0}{2E}}\int\frac{rdr}{\sqrt{r^2+\frac{Ze^2}{E}r-\frac{M^2}{2m_0E}}}+c$$

$$=\sqrt{\frac{m_0a}{Ze^2}}\int\frac{rdr}{\sqrt{(r+a)^2-a^2\varepsilon^2}}+c.$$

这个积分不难完成,只需利用一个显然的代换即可. 令

$$r+a=a\varepsilon\text{ch}\xi,$$

这时积分成为

$$t=\sqrt{\frac{m_0a^3}{Ze^2}}(\varepsilon\text{sh}\xi-\xi)+c.$$

适当选择计时原点,使常数 $c=0$,即得 $r\sim t$ 关系的参数表达式,

$$r=a(\varepsilon\text{ch}\xi-1),\quad t=\sqrt{\frac{m_0a^3}{Ze^2}}(\varepsilon\text{sh}\xi-\xi).\qquad(6.9)$$

通过同一个参数,还可以用来表示电子的笛卡尔坐标 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$,由(6.7)~(6.9)式,我们有 $\varepsilon x=P-r=a(\varepsilon^2-1)-a(\varepsilon\text{ch}\xi-1)=a\varepsilon(\varepsilon-\text{ch}\xi)$,而 y 可由$\sqrt{r^2-x^2}$来求. 我们把电子沿双曲线轨道的运动方程的参数表达式列在下面:

$$r=a(\varepsilon\text{ch}\xi-1),\quad t=\sqrt{\frac{m_0a^3}{Ze^2}}(\varepsilon\text{sh}\xi-\xi),$$

$$x = a(\varepsilon - \mathrm{ch}\xi), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,\mathrm{sh}\xi. \qquad (6.10)$$

式中参数 ξ 的值从 $-\infty \to +\infty$，参量 (a,ε) 由(6.6)和(6.8)式决定.

但在讨论碰撞问题时，常常不用能量 E 和角动量 M 作为物理参量，而代之以电子在无穷远处的初始速度 v 以及电子对离子的瞄准距离 b(见图 6.2). 显然，(E,M) 和新参量 (v,b) 的关系为

$$E = \frac{1}{2}m_0v^2, \quad M = m_0vb.$$

因此，双曲线轨道的几何参量 (a,ε) 也可用 (b,v) 表示：

$$a = \frac{Ze^2}{m_0v^2},$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2m_0^2v^4}{Z^2e^4}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

但可以证明，电子经过离子近旁后的散射角 χ(即电子入射方向和出射方向之夹角，见图 6.2)由下式决定：

$$\cot\frac{\chi}{2} = \frac{b}{a}. \qquad (6.11)$$

因此，a 的物理意义在于，它代表电子受到 90°散射时 $(\chi = 90°)$ 所应具有的瞄准距离. 习惯上将这一瞄准距离记为 b_0，$a = b_0$. 最后，将(6.10)式改写为

$$r = b_0(\varepsilon\mathrm{ch}\xi - 1), \quad t = \frac{b_0}{v}(\varepsilon\mathrm{sh}\xi - \xi),$$

$$x = b_0(\varepsilon - \mathrm{ch}\xi), \quad y = b\,\mathrm{sh}\xi. \qquad (6.12)$$

式中

$$b_0 = \frac{Ze^2}{m_0v^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{b_0^2}}.$$

当然，(6.12)给出的双曲线运动方程只是对电子运动的近似描写；因为我们利用了能量守恒定律，而事实上由于存在轫致辐射，电子的能量将逐渐减少，仅当辐射光子能量远小于电子能量时，才近似地满足能量守恒.

§6.2 轫致辐射的谱分布

6.2.1 轫致辐射谱的经典公式及其适用范围

知道了电子的运动方程，即可求出一个电子在单位时间中在单位频率间隔中辐射的能量，即可求轫致辐射的谱功率.

当电子在等离子体中穿行时，可能以各种瞄准距离 b 和离子碰撞. 从非常粗糙的观测即可了解，瞄准距离 b 越大，则辐射频率 ω 越小. 事实上，当 $b\to\infty$ 时，电子不会得到任何加速，辐射频率 $\omega\to 0$. 粗略地说，对于一个给定入射速度 v 的电子，不同的瞄准距离 b 对应着不同的辐射频率 ω（当然，严格地说，即使给定了 b，辐射也远非单色的）.

还可以作进一步的定性分析，估计一下具有参量 (v,b) 的电子的主要辐射频率值 ω. 显然，电子沿双曲轨道运动时，大部分时间是近似的直线匀速运动（见图 6.2），仅在近心点附近才获得较大加速度，并引起辐射. 这一段加速时间的量级约为 $\tau\simeq\dfrac{b}{v}$，τ 叫做碰撞时间. 可以证明，只当频率 ω 和 τ 满足关系 $\omega\tau\lesssim 1$ 时，该频率的辐射才是显著的. 事实上，这一点可由(1.32)式看出（该式是非相对论电子非周期运动的谱公式），

$$W(\omega)=\frac{8\pi}{3c^3}d^2(\omega)=\frac{8\pi}{3c^3}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e\dot{v}(t)e^{i\omega t}dt\right|^2.$$

在(1.32)式中，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e\dot{v}(t)e^{i\omega t}dt\simeq\int_0^{\tau}e\dot{v}(t)e^{i\omega t}dt;$$

因为 $\dot{v}(t)$ 只在 0—τ 时间中才显著异于零. 假如频率 ω 太高，使 $\omega\tau\gg 1$（或 $\omega\dfrac{b}{v}\gg 1$），则被积表达式在 0—τ 时间中将会剧烈“振荡”，相互抵消，使这一积分近似为零，即“高频”的辐射能量 $W(\omega)\simeq 0$；仅当 $\omega\tau\lesssim 1$ 时，才会有显著的辐射.

由 $\omega\tau\simeq 1$ 即可估计一个具有参量 b,v 的电子的辐射频率，

$$\frac{1}{\omega} \simeq \frac{b}{v} = \frac{b_0}{v}\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{Ze^2}{m_0 v^3}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \qquad (6.13)$$

关系 $\omega \simeq v/b$ 表明，速度大的电子产生的韧致辐射频率 ω 也高，这是很自然的，因为韧致光子能量 $\hbar\omega$ 本就是以消耗热电子动能为代价产生的，动能越大，产生的光子能量（频率）也越大．另外，小的瞄准距离 b 对应于高的辐射频率 ω，当 $b \to \infty$，有 $\omega \to 0$. 这也是易于理解的，瞄准距离越小，即电子近距擦过正离子，产生的加速度越大，自然会产生能量 $\hbar\omega$ 较大光子．严格地说，对于给定 (b, v) 的电子，其辐射也远非单色的，上式给出的只是该电子的主要辐射频率．实际上，频率在 0 ω 范围中都满足条件 $\omega\tau \lesssim 1$.

举一个具体例子应用(6.13)式．对于一个热运动速度 $v \simeq 10^8$cm/s（相当于 $T_e \sim 10^5$K）的电子，假如它产生低频辐射（射电波），$\omega \simeq 10^{11}\text{s}^{-1}$，则由(6.13)可知，电子的双曲线轨道的偏心率 $\varepsilon \simeq 10^4$，$\varepsilon \gg 1$. 这表示双曲线轨道实际上几乎退化成一直线，表明电子几乎未受离子场加速，因此低频辐射确实来自远距离（b 取大值）的碰撞.

要定量计算一个在无穷远处以速度 v 入射的，具有确定的瞄准距离 b 的电子的辐射谱，自然应采用非相对论电子作非周期运动情况下的谱公式(1.32)或(1.33)式，因为电子现在是沿双曲线轨道作非周期性运动．由(1.32)式或(1.33)式可见，求谱分布的要点在于找出偶极矩的二阶导数 $\ddot{\boldsymbol{d}}(t)$（或者偶极矩 $\boldsymbol{d}(t)$ 本身）的傅氏分量．当 v, b 已给定时，电子的双曲线轨道方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 即属确定（见上节），从而可求出 $\boldsymbol{d}(t) = e\boldsymbol{r}(t)$ 的傅氏展开，定出 $\boldsymbol{d}(t)$ 的傅氏分量．求 $\boldsymbol{d}(t)$ 的傅氏分量问题实即求位矢 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$ 的傅氏分量问题．按照(6.12)式，$x(t)$，$y(t)$ 的参数形式为

$$x = b_0(\varepsilon - \text{ch}\xi), \quad y = b\,\text{sh}\xi, \quad t = \frac{b_0}{v}(\varepsilon\,\text{sh}\xi - \xi).$$

$x(t)$，$y(t)$ 的傅氏积分形式为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega)e^{-i\omega t}d\omega.$$

其中 $x(t)$，$y(t)$的傅氏分量由以下式子给出：

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t}dt,$$

$$y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{i\omega t}dt.$$

由于 $x(t)$，$y(t)$是以参数形式给出的，所以以上求傅氏分量的积分变数 t 应换成参量 ξ. 这样来求傅氏分量 $x(\omega)$，$y(\omega)$的办法是比较麻烦的，但是如果利用关系 $\dot{x}(\omega) = -i\omega x(\omega)$ 及 $\dot{y}(\omega) = -i\omega y(\omega)$，首先计算速度$\dot{x}(t)$及 $\dot{y}(t)$的傅氏分量 $\dot{x}(\omega)$及 $\dot{y}(\omega)$，从而得出 $x(\omega)$和 $y(\omega)$，这比直接计算 $x(\omega)$，$y(\omega)$方便.

$\dot{x}(\omega) = -i\omega x(\omega)$及 $\dot{y}(\omega) = -i\omega y(\omega)$的关系是显然的，因为 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$，故有

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega)x(\omega)e^{-i\omega t}d\omega;$$

另一方面，对 $\dot{x}(t)$直接作傅氏展开，则有

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$

比较 $\dot{x}(t)$的两个积分，即得 $\dot{x}(\omega) = -i\omega x(\omega)$.

由于

$$\dot{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(t)e^{i\omega t}dt,$$

$$\dot{y}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{y}(t)e^{i\omega t}dt,$$

但是

$$\dot{x}(t)dt = dx = -b_0\mathrm{sh}\xi d\xi,$$

$$\dot{y}(t)dt = dy = b\mathrm{ch}\xi d\xi,$$

因此上述积分中积分变数的替换（由 t 到 ξ）很简单，即

$$\dot{x}(\omega) = \frac{-b_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sh}\xi e^{i\frac{\omega b_0}{v}(\varepsilon\mathrm{sh}\xi-\xi)}d\xi,$$

$$\dot{y}(\omega) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ch}\xi e^{i\frac{\omega b_0}{v}(\varepsilon\text{sh}\xi - \xi)} d\xi.$$

由此得到 $x(t)$，$y(t)$ 的傅氏分量为

$$x(\omega) = \frac{\dot{x}(\omega)}{-i\omega} = \frac{-ib_0}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sh}\xi e^{i\frac{\omega b_0}{v}(\varepsilon\text{sh}\xi - \xi)} d\xi,$$

$$y(\omega) = \frac{\dot{y}(\omega)}{-i\omega} = \frac{ib}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ch}\xi e^{i\frac{\omega b_0}{v}(\varepsilon\text{sh}\xi - \xi)} d\xi$$

$$= \frac{ib}{2\pi\omega\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega b_0}{v}(\varepsilon\text{sh}\xi - \xi)} d\xi.$$

关于 $y(\omega)$ 的式中，从第一个积分变到第二个积分时，我们利用了以下等式：

$$\text{ch}\xi d\xi = d(\text{sh}\xi) = \frac{1}{\varepsilon} d(\varepsilon\text{sh}\xi - \xi + \xi).$$

以上关于 $x(\omega)$，$y(\omega)$ 的积分表示可以进一步简化，因为按照贝塞尔函数理论，我们有

$$H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu\xi - ix\text{sh}\xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu\xi + ix\text{sh}\xi} d\xi.$$

$H_\nu^{(1)}(ix)$ 称为含虚宗量的第一类 ν 阶汉克尔函数，以及

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu\xi + ix\text{sh}\xi} \text{sh}\xi d\xi = \frac{\partial}{\partial(ix)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu\xi + ix\text{sh}\xi} d\xi$$

$$= i\pi H_\nu^{(1)'}(ix),$$

式中 $H_\nu^{(1)'}(ix)$ 表示 $H_\nu^{(1)}(ix)$ 对宗量 ix 的导数. 因此

$$x(\omega) = +\frac{b_0}{2\omega} H_{i\omega b_0/v}^{(1)'}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right),$$

$$y(\omega) = -\frac{b}{2\omega\varepsilon} H_{i\omega b_0/v}^{(1)}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right).$$

有了 $x(\omega)$，$y(\omega)$，即可求出偶极矩 $\boldsymbol{d}$ 的傅氏分量为

$$\boldsymbol{d}(\omega) = e\boldsymbol{r}(\omega) = ex(\omega)\boldsymbol{i} + ey(\omega)\boldsymbol{j},$$

以及

$$d^2(\omega) = e^2(x^2(\omega) + y^2(\omega)).$$

把它代入谱分布公式(1.33)中，得到

$$
\begin{aligned}
W(\omega) &= \frac{8\pi}{3c^3}\omega^4 d^2(\omega) \\
&= \frac{8\pi}{3c^3}\omega^4 e^2 \frac{b_0^2}{4\omega^2}\left[H_{i\omega b_0/v}^{(1)'2}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}H_{i\omega b_0/v}^{(1)2}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right)\right] \\
&= \frac{2\pi\omega^2}{3c^3}e^2 b_0^2\left[H_{i\omega b_0/v}^{(1)'2}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}H_{i\omega b_0/v}^{(1)2}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right)\right]
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

[求模的平方时，注意 $y(\omega)$ 是纯虚数].

(6.14)式给出了一个以初速 v、瞄准距离 b 入射电子与正离子碰撞时所产生的频率为 ω 的单色辐射总能量. 显然，$W(\omega)$ 依赖于参量 v 和 b，$W(\omega)=W(\omega,v,b)$[(6.14)式似不显含 b，但含有偏心率 ε，而 ε 和 b 有关，$b=b_0\sqrt{\varepsilon^2-1}$].

以上只讨论了电子和正离子的碰撞，对于电子与负离子的碰撞，讨论是完全类似的，只是傅氏分量 $x(\omega)$，$y(\omega)$ 与上述情况相差一个因子 $e^{-\pi\frac{\omega b_0}{v}}$. 因此，最后求出的 $W(\omega)$ 和(6.14)式的唯一不同是乘上一个指数衰减因子 $e^{-2\pi\frac{\omega b_0}{v}}$，因而辐射较弱，这里不再多加讨论.

利用(6.14)式，可检验本节一开始的定性分析中的结论：对于给定 b，v 的电子，其韧致辐射的频率 ω 应满足 $\omega\tau\simeq\omega\frac{b}{v}\lesssim 1$；当 $\omega\frac{b}{v}\gg 1$ 时，辐射将很微弱. 我们仅就低频 $\left(\omega\ll\frac{v}{b_0}\right)$ 及远距离碰撞 ($\varepsilon\gg 1$) 下作此检验. 这时，将条件 $\omega\ll\frac{v}{b_0}$ 及 $\varepsilon\gg 1$ 代入(6.14)式，并注意

$$
b = b_0\sqrt{\varepsilon^2-1}\simeq b_0\varepsilon \quad (\text{当 } \varepsilon\gg 1),
$$

则(6.14)化为

$$W(\omega)\simeq\frac{2\pi\omega^2}{3c^3}e^2b_0^2\left[H_0^{(1)'2}\left(i\frac{\omega b}{v}\right)-H_0^{(1)2}\left(i\frac{\omega b}{v}\right)\right]. \quad (6.14')$$

最后，再利用贝塞尔函数的近似式

$$H_0^{(1)}(ix)\simeq\frac{2}{i\pi}\ln\frac{2}{\Gamma x}\quad（当 x\ll 1），$$

式中 $\Gamma=e^c$，c 是欧拉常数，$\Gamma=1.78107$. 代入(6.14′)式，即可画出 $W(\omega)$-$\frac{\omega b}{v}$ 曲线，如图 6.3 所示. 图中横轴为以 $\frac{\omega b}{v}$ 为单位的频率值. 由图可见，对于一个具有参量 b,v 的电子，辐射主要集中在 $\frac{\omega b}{v}\lesssim 1$ 的范围中. 在高频范围中，即当 $\frac{\omega b}{v}\gtrsim 1$ 时，辐射可忽略不计，与定性结果相一致.

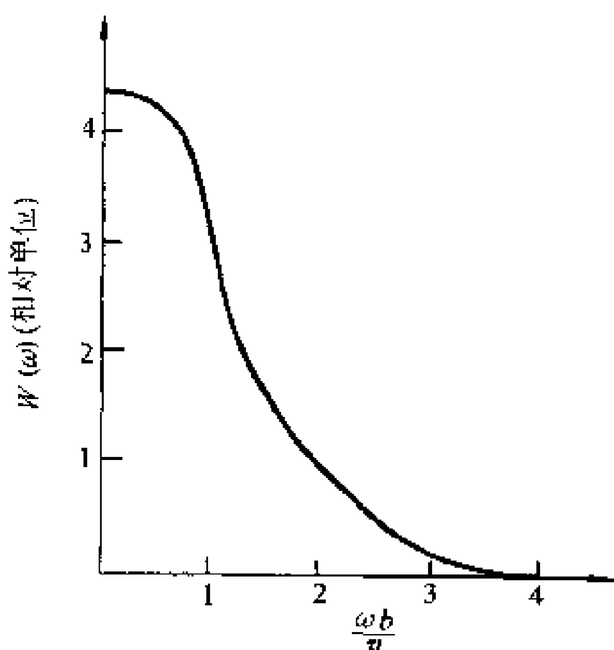


图 6.3

有了 $W(\omega,b,v)$，即可求出一个速度为 v 的电子的韧致辐射的谱功率了. 这时，我们将考虑该电子以各种瞄准距离 b 和离子的碰撞.

首先，对一个以初速度 v 运动的电子，当它在离子电量为 Ze，离子密度为 N_z 的等离子体中穿行时，求出该电子以瞄准距离 b—$b+db$ 和离子碰撞的次数. 如果我们以围绕电子速度方向的环形面积 $2\pi bdb$ 为底，以电子速度 v 为高作一圆柱壳层（图 6.4），则其体积为 $2\pi bdbv$. 其中正离子数为 $2\pi N_z vbdb$. 显然，这也就是单位时间里电子以瞄准距离 b—$b+db$ 和离子

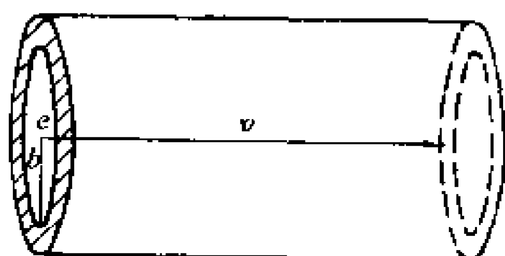


图 6.4

发生碰撞的次数. b 值越小，则碰撞次数越少，即辐射的高频光子数目越少. 因此，可以定性地预料，单个电子的轫致辐射、谱功率应当随频率的增加而有下降的趋势.

由(6.14)式，每发生一次这种碰撞而引起的频率为 ω 的单色辐射能量为 $W(\omega,b,v)$. 将它乘以单位时间碰撞次数 $2\pi N_z vbdb$，再对 b 从 0—∞求积分，即得该电子的谱功率 $P(\omega)$，

$$P(\omega) = 2\pi N_z v \int_0^\infty W(\omega,b,v)bdb. \tag{6.15}$$

由于(6.14)式中，$W(\omega,b,v)$ 是通过偏心率 ε 而与 b 有关的，所以最好是将(6.15)式中对 b 的积分改写一下，用 ε 代替 b 作积分变数. 按照(6.12)式，$\varepsilon^2=1+\frac{b^2}{b_0^2}$，故

$$\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{b_0^2}bdb,$$

代入(6.15)式中，即有

$$\begin{aligned}P(\omega) &= 2\pi N_z v b_0^2 \int_1^\infty W(\omega,\varepsilon,v)\varepsilon d\varepsilon \\ &= 2\pi N_z v b_0^4\left(\frac{2\pi\omega^2}{3c^3}e^2\right)\int_1^\infty \varepsilon d\varepsilon\left[H^{(1)'2}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right)\right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}H^{(1)2}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right)\right].\end{aligned}$$

令 $i\frac{\omega b_0}{v}\varepsilon=x$，则积分化为

$$\int_1^\infty \varepsilon d\varepsilon\left[H^{(1)'2}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right) - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}H^{(1)2}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\varepsilon\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{\omega b_0}{v}\right)^2}\int_{i\omega b_0/v}^\infty \left[H^{(1)'2}_{i\omega b_0/v}(x)\right.$$

$$
-\frac{\left(-\frac{x^2}{\left(\frac{\omega b_0}{v}\right)^2}\right)-1}{-\frac{x^2}{\left(\frac{\omega b_0}{v}\right)^2}} H^{(1)^2}_{i\omega b_0/v}(x) \Bigg] x dx
$$

$$
=\frac{-1}{\left(\frac{\omega b_0}{v}\right)^2} \int_{i\omega b_0/v}^{\infty} \Bigg[H^{(1)'^2}_{i\omega b_0/v}(x)
$$

$$
-\left\{1-\frac{\left(i\frac{\omega b_0}{v}\right)^2}{x^2}\right\} H^{(1)^2}_{i\omega b_0/v}(x)\Bigg] x dx. \qquad (6.16)
$$

最后的积分可直接利用公式

$$
z\left[Z'^2_p-\left(1-\frac{P^2}{z^2}\right)Z^2_p\right]=\frac{d}{dz}(zZ_pZ'_p),
$$

式中 Z_p 是 P 阶贝塞尔方程一个任意解①.

因此,积分(6.16)式可化为

---

① 不难自右至左证明此等式.

因为

$$
\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zZ_pZ'_p)=(Z_pZ'_p+zZ'^2_p+zZ_pZ''_p)\frac{1}{z}
$$

$$
=Z_pZ''_p+Z'^2_p+\frac{1}{z}Z_pZ'_p,
$$

再注意 Z_p 是贝塞尔方程的解,即 Z_p 满足方程

$$
Z''_p+\frac{1}{z}Z'_p+(1-\frac{P^2}{z^2})Z_p=0,
$$

由此得

$$
Z_pZ''_p+\frac{1}{z}Z_pZ'_p+\left(1-\frac{P^2}{z^2}\right)Z^2_p=0,
$$

所以

$$
\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zZ_pZ'_p)=Z_pZ''_p+Z'^2_p+\frac{1}{z}Z_pZ'_p
$$

$$
+\left(1-\frac{P^2}{z^2}\right)Z^2_p-\left(1-\frac{P^2}{z^2}\right)Z^2_p
$$

$$
=Z'^2_p-\left(1-\frac{P^2}{z^2}\right)Z^2_p.
$$

$$-\frac{1}{\left(\frac{\omega b_0}{v}\right)^2}\int_{i\omega b_0/v}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[xH_{i\omega b_0/v}^{(1)'}(x)H_{i\omega b_0/v}^{(1)}(x)\right]dx.$$

再注意当 $x\to\infty$ 时，汉克尔函数 $H_{i\omega b_0/v}(x)\to 0$，结果上述积分值为

$$\frac{i}{\frac{\omega b_0}{v}}H_{i\omega b_0/v}^{(1)'}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)H_{i\omega b_0/v}^{(1)}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right).$$

因此，最后得到

$$\begin{aligned}P(\omega)&=2\pi N_z v b_0^4\left(\frac{2\pi\omega^2}{3c^3}e^2\right)\left[\frac{i}{\frac{\omega b_0}{v}}H_{i\omega b_0/v}^{(1)'}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)H_{i\omega b_0/v}^{(1)}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)\right]\\&=\left(\frac{4\pi^2}{3}\right)N_z v^2\left(\frac{e^2}{c^3}\right)\omega b_0^3 H_{i\omega b_0/v}^{(1)'}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)H_{i\omega b_0/v}^{(1)}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right).\qquad(6.17)\end{aligned}$$

(6.17)式即为初速为 v 的电子的轫致辐射的谱功率. 显然，$P(\omega)$ 和速度 v 有关，$P(\omega)=P(\omega,v)$. 这一结果稍嫌复杂，现考虑低频和高频两个极限情况下的 $P(\omega)\sim\omega$ 关系.

A. 在低频情况下，$\omega\ll v/b_0$(这相应于小角度电子散射，可由电子轫致辐射频率 ω 必须满足的条件

$$\omega\tau\simeq\omega\frac{b}{v}=\omega\frac{b_0}{v}\sqrt{\varepsilon^2-1}\lesssim 1$$

中看出；当 $\frac{\omega b_0}{v}\ll 1$ 时，必有 $\varepsilon\gg 1$，轨道近于直线).

由于汉克尔函数的积分表示中，

$$H_{i\omega b_0/v}^{(1)}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i\omega b_0}{v}(\xi-\mathrm{sh}\xi)}d\xi,$$

积分变量 ξ 唯一重要的范围是使被积函数的指数在与 1 同量级的范围. 因此，对于低频率 $\left(\omega\ll\frac{v}{b_0}\right)$，只是大的 ξ 的区域才是重要的. 但对于大的 ξ，有 $\mathrm{sh}\xi\gg\xi$. 因此，近似有

$$H_{i\omega b_0/v}^{(1)}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)\simeq\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{i\omega b_0}{v}\mathrm{sh}\xi}d\xi=H_0^{(1)}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right).$$

同理可求得

$$H^{(1)'}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right) \simeq H^{(1)'}_0\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right).$$

利用近似式(当 $x \ll 1$ 时)

$$H^{(1)}_0(ix) \simeq \frac{2}{\pi i}\ln\frac{2}{\Gamma x},$$

式中 $\Gamma = e^c = 1.78107$,c 是欧拉(Euler)常数.从而在低频 $\omega \ll v/b_0$ 下,我们有

$$\begin{aligned}
&H^{(1)'}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)H^{(1)}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)\\
&\simeq H^{(1)'}_0\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)H^{(1)}_0\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)\\
&\simeq \frac{4v}{\omega b_0\pi^2}\ln\left(\frac{2v}{\Gamma\omega b_0}\right).
\end{aligned}$$

代入(6.17)式,因而低频情况下$\left(\omega \ll \frac{v}{b_0}\right)$谱功率为

$$P(\nu) = 2\pi P(\omega) = \frac{32\pi}{3}v^2 N_z\left(\frac{e^2}{c^3}\right)b_0^2\ln\left(\frac{2v}{\Gamma\omega b_0}\right). \quad (6.18)$$

[由于 $P(\nu)d\nu = P(\omega)d\omega$,$d\omega = 2\pi d\nu$,故

$$P(\nu) = 2\pi P(\omega)]$$

由(6.18)式可见,在 $\omega \ll \frac{v}{b_0}$ 的低频情况下,功率 $P(\nu)$ 随着频率 ω 的增加作对数式下降.

B. 在高频情况下,$\omega \gg \frac{v}{b_0}$,对应于大角度电子散射.

当 $\omega \gg \frac{v}{b_0}$,在 $H^{(1)}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)$ 的积分式中,与前面的情况正相反,小的 ξ 的区域才是重要的.据此,可以展开被积函数的指数为 ξ 的幂级数,并近似得到

$$H^{(1)}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right) \simeq \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega b_0}{6v}\xi^3}d\xi = \frac{2}{\pi i}\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{-i\frac{\omega b_0}{6v}\xi^3}d\xi\right).$$

若代换$\frac{i\omega b_0}{6v}\xi^3 = \eta$,则上面的积分化为 Γ 函数(Γ 函数定义是 $\Gamma(x)$

$= \int_0^\infty e^{-\eta}\eta^{x-1}d\eta$），结果是

$$H^{(1)}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right) \simeq \frac{1}{\pi i}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{6v}{\omega b_0}\right)^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

同理得到

$$H^{(1)'}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right) \simeq \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6v}{\omega b_0}\right)^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

再利用 Γ 函数理论中的熟知公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

故

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

因此，当 $\omega \gg \frac{v}{b_0}$，有

$$H^{(1)'}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right)H^{(1)}_{i\omega b_0/v}\left(\frac{i\omega b_0}{v}\right) \simeq \left(\frac{4}{\pi\sqrt{3}}\right)\left(\frac{v}{\omega b_0}\right).$$

因此得出高频情况下$\left(\omega \gg \frac{v}{b_0}\right)$的谱功率为

$$P(\nu) = 2\pi P(\omega) = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}}N_z v^3 b_0^2\left(\frac{e^2}{c^3}\right). \tag{6.19}$$

可见，在高频情况下，谱功率不随频率变化.

综合上述结果，我们得到在低频和高频端的一个给定速度 v 的电子轫致辐射的谱功率为

$$P(\nu) = \begin{cases} \left(\frac{32}{3}\pi\right)N_z v^3\left(\frac{e^2}{c^3}\right)b_0^2\ln\left(\frac{2v}{\Gamma\omega b_0}\right), & \text{当 } \omega \ll \frac{v}{b_0}; \\ \left(\frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}}\right)N_z v^3\left(\frac{e^2}{c^3}\right)b_0^2, & \text{当 } \omega \gg \frac{v}{b_0}. \end{cases} \tag{6.20}$$

(6.20)式表明，功率 $P(\nu)$ 在低频部分是随频率增大作缓慢的对数式下降，到高频部分则不再随 ν 变化. $P(\nu)$ 随 ν 的增大而缓慢下降的物理原因大体上是，低频辐射对应于电子有大的瞄准距离

b(或者，对应于电子的小散射角). 但已指出，电子发生 b 值大的散射次数较多，即辐射低频光子的数目略为多些. 这就是低频处功率 $P(\nu)$ 较大的原因. 但另一方面，尽管低频光子数目多，但每个光子能量 $h\nu$ 较小. 这就决定了 $P(\nu)$ 随频率 ν 的下降只能作很缓慢的对数式增大.

关于(6.20)第一式(即低频部分)的讨论. 这里应该指出，式中对数宗量$\left(\frac{2v}{\Gamma\omega b_0}\right)$的物理意义是:

$$\frac{2v}{\Gamma\omega b_0} \simeq \frac{v/\omega}{b_0} = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}.$$

$b_{\max}$和 $b_{\min}$分别是瞄准距离的上下限. 现为说明这一点，先求 $b_{\min}$值. 对于一个以瞄准距离 b，速度 v 入射电子，其碰撞时间 $\tau \simeq b/v$. 在时间 τ 中，电子走过的路程 $L \simeq b$. 在这段路程中，电子动能的改变为

$$\Delta W \simeq \int_0^b f dS \simeq \frac{Ze^2}{b^2} \cdot b = \frac{Ze^2}{b}.$$

显然，能量的改变 $\Delta W \leqslant \frac{1}{2} m_0 v^2$，即

$$\frac{Ze^2}{b} \leqslant \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

由此可以定出，最小瞄准距离为

$$b_{\min} \simeq \frac{Ze^2}{m_0 v^2} = b_0.$$

然后，再求 $b_{\max}$的值. 这可由条件 $\omega\tau \simeq \omega \frac{b}{v} \lesssim 1$ 引出. 由这一条件可知，仅当 $b \lesssim \frac{v}{\omega}$ 时，才会对频率为 ω 的辐射有贡献. 因此，对应于给定频率 ω，最大瞄准距离为 $b_{\max} = \frac{v}{\omega}$. 因此，可以用比值 $b_{\max}/b_{\min}$ 表示低频端的谱功率$\left(\text{当 } \omega \ll \frac{v}{b_0}\right)$,

$$P(\nu) = \left(\frac{32\pi}{3}\right) N_z v^3 \left(\frac{e^2}{c^3}\right) b_0^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right). \qquad (6.21)$$

(6.21)和(6.20)第一式是等价的.在讨论量子力学的谱公式时,我们将回到(6.21)式的讨论.

以上推导实际上是在经典偶极辐射近似下作出的,但偶极辐射近似是有条件的.首先,它仅适用于速度 $v \ll c$ 的情况(非相对论电子),但这仍是一个比较宽的限制.进一步的限制是由以下考虑得出的,即经典的偶极辐射近似只有当辐射光子能量 $h\nu \ll \frac{1}{2}m_0v^2$ 时才有效.只有这时才能对电子采用经典的轨道描述,应用经典辐射理论(见第一章).将此限制条件 $\nu \ll \frac{m_0v^2}{2h}$ 与(6.20)式给出的频率下限 $\nu \gg \frac{v}{2\pi b_0}$ 作比较,即经典公式(6.20)中所说的高频 $\nu \gg \frac{v}{2\pi b_0}$ 仍必须远小于 $\frac{m_0v^2}{2h}$ 才行.因此,

$$\frac{v}{2\pi b_0} \ll \frac{1}{2h}m_0v^2,$$

代入 $b_0 = \frac{Ze^2}{m_0v^2}$,再注意精细结构常数 $\alpha_f = \frac{e^2}{\hbar c}$,则上述不等式化为

$$v \ll Z\alpha_f c. \tag{6.22}$$

已知 $\alpha_f = \frac{1}{137}$,(6.22)式即经典偶极辐射近似适用的条件,即经典公式(6.20)的适用条件.它比条件 $v \ll c$ 要来得苛刻一些.如果离子的 Z 值取为1,则粗略地说,条件(6.22)相当于 $v \lesssim 10^{-2}c$.按照这一限制可知,适于用经典轫致辐射公式讨论的热等离子体温度 T_e 不得超过 10^5—10^6K;因为当 $T_e \simeq 10^5$K 时,电子的平均热运动速度(假定电子具有麦氏速度分布)为

$$v = \sqrt{\frac{8KT_e}{\pi m_0}} \simeq 2 \times 10^8 \text{cm/s} \simeq 10^{-2}c.$$

为加深读者对条件(6.22)式的理解,可以换一个方法引出此条件.已经指出,电子的最小瞄准距离为

$$b_{min} \simeq \frac{Ze^2}{m_0v^2} = b_0.$$

另一方面，我们可以根据测不准关系给出 $b_{\min}$ 值. 事实上，由于电子的波动性，经典轨道观念只是实际运动的近似描述，我们应把电子的经典轨道运动理解为波包的运动，因而其轨道只能在一个宽度为 $\Delta x\simeq\dfrac{h}{\Delta p}$ 的不确定范围中规定下来，即电子轨道不可能是一条几何线，轨道有一定"宽度"Δx. 对于一个动量为 $p=m_0v$ 的电子，假如对它能采用经典力学的描写，则其动量的不确定性 Δp 不能超过电子的动量 p，即 $\Delta p\leqslant p$. 由此得到，一个动量为 p 的电子，其轨道"宽度"为

$$\Delta x\simeq\frac{h}{\Delta p}\gtrsim\frac{h}{p},$$

而当电子的瞄准距离 b 小于 Δx 时，经典观念失效. 事实上，当 $b<\Delta x$ 时，瞄准距离本身就失去意义. 由此定出最小瞄准距离为

$$b_{\min}\simeq\frac{h}{\Delta p}\geqslant\frac{h}{p}.$$

比较上述两个 $b_{\min}$ 的表示式，即可得到

$$v\lesssim Z\alpha_f c.$$

这样重又导出(6.22)式，只是条件略为放宽，用符号$\lesssim$代替了符号$\ll$.

当粒子速度较高时(但同时仍满足偶极辐射条件 $v\ll c$)，则必须用严格的量子理论处理轫致辐射. 由条件 $\omega\tau\simeq\omega b/v\simeq1$ 可知，高速粒子的轫致辐射可以达到很高的频率值，辐射谱将扩展到较宽的频率范围中. 可以预料，即使对高速电子采用量子理论，但在谱的低频端，量子力学结果和经典结果不会有大的出入. 因为低频辐射实际上是由于远距离碰撞(b 值大)造成的，此时辐射光子频率低，因而 $h\nu$ 远小于电子动能，这正是经典理论适用的范围. 因此，对于高速电子，经典结果(6.20)也不是没有价值的，在低频端仍给出正确结果. 仅在谱的高频部分，量子理论结果才显著不同于经典结果，即与(6.20)第二式有很大的不同.

在给出量子力学公式之前，有必要事先说明两个有关的概念，即辐射截面 $\sigma(\nu)$ 和冈特因子 $g_{ff}(v,\nu)$.

6.2.2 微分辐射截面和冈特因子 $g_{ff}(v,\nu)$

韧致辐射的微分辐射截面 $\sigma(\nu)d\nu$ 的定义是

$$\sigma(\nu)d\nu = \frac{P(\nu)d\nu}{N_Z v h\nu}, \tag{6.23}$$

其中,$P(\nu)d\nu$ 代表一个电子在 ν—$\nu+d\nu$ 频率间隔的韧致辐射谱功率.

因此,$\frac{P(\nu)d\nu}{h\nu}$代表电子在单位时间中所辐射的频率在 ν—$\nu+d\nu$ 范围中的光子数,N_Z 代表离子密度,v 代表电子的速度. 自然,如果在电子静止参考系中观察碰撞,使电子成为受碰撞的静止"靶",则 v 也可看作离子相对于电子的速度. 这样,$N_Z v$ 将代表单位时间通过单位面积擦过这个电子近旁的离子数,即离子流密度. 这些擦过的离子都和靶电子发生了碰撞,因面(6.23)式给出的截面定义实际上表示

$$\sigma(\nu)d\nu = \frac{\text{单位时间中电子辐射的频率为 }\nu\text{—}\nu + d\nu\text{ 的光子总数}}{\text{单位时间通过单位面积和该电子发生碰撞的离子总数}}.$$

读者可比较(5.6)式给出的汤姆孙截面的意义,由上式可见,截面 $\sigma(\nu)d\nu$ 的物理意义是:一个速度为 v 的电子由于和近旁离子发生碰撞,每碰撞一次而发射一个频率为 ν—$\nu+d\nu$ 的光子的概率. 按照(6.23)式,只要知道了 $P(\nu)$,即可定出截面 $\sigma(\nu)$,或者正相反,只要知道了 $\sigma(\nu)$,即可定出谱功率 $P(\nu)$,即

$$P(\nu)d\nu = N_Z v h\nu\sigma(\nu)d\nu. \tag{6.23'}$$

前面已经根据经典理论算出了辐射功率 $P(\nu)$,即(6.20)式,因此可定出经典的微分辐射截面值. 按照(6.20)式,在 $\omega \gg \frac{v}{b_0}$ 的高频极限下(也就是 $\omega \gg \frac{mv^3}{Ze^2}$),得到

$$\sigma(\nu) = \frac{16\pi}{3^{3/2}}\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)b_0^2\,\frac{1}{\nu}, \qquad \text{当 } \omega \gg \frac{v}{b_0};$$

或者

$$\sigma(\nu) = \left(\frac{16\pi}{3^{3/2}}\right)\alpha_f^3 K_e^{-2} Z^2/\nu = \frac{\sigma_0}{\nu}. \tag{6.24}$$

其中

$$K_e^{-1} = \frac{\hbar}{m_e v}$$

代表电子德布罗意波长的$\frac{1}{2\pi}$倍.

因此,在经典高频端,$\sigma(\nu)$和频率有很简单的反比关系 $\sigma(\nu) \propto \frac{1}{\nu}$. 比例系数即为常数 $\sigma_0 = \frac{16\pi}{3^{3/2}}\alpha_f^3 K_e^{-2} Z^2$. 必须注意,$\sigma_0$ 本身并不具有截面的意义,除以 ν 才表示截面.

但在低频端,$\sigma(\nu) \sim \nu$ 关系复杂些,将偏离频率反比规律 $\sigma(\nu) \propto \frac{1}{\nu}$ 形式. 由(6.20)式第一式可见,对于低频极限,即 $\omega \ll v/b_0$(或 $\omega \ll \frac{m_0 v^3}{Ze}$),

$$\sigma(\nu) = \left(\frac{16}{3}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^2 \alpha_f b_0^2 \frac{1}{\nu} \ln\left(\frac{2v}{\Gamma \omega b_0}\right),$$

或者

$$\sigma(\nu) = \left(\frac{16}{3}\right)\alpha_f^3 K_e^{-2} \frac{1}{\nu} Z^2 \ln\left(\frac{2v}{\Gamma \omega b_0}\right), \tag{6.25}$$

式中 α_f, K_e^{-1} 的意义同(6.24)式.

(6.25)式给出低频端的截面公式. 比较(6.25)式和(6.24)式,可见低频和高频截面公式不同,然而我们总可以把低频截面改写为

$$\sigma(\nu) = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{m_0 v^3}{5.6 Z e^2 \nu}\right)\right]\frac{\sigma_0}{\nu} \qquad \left(当\ \nu \ll \frac{m_0 v^3}{2\pi Z e^2}\right) \tag{6.25$'$}$$

(式中对数的宗量$\frac{m_0 v^3}{5.6 Z e^2 \nu} = \frac{2v}{\Gamma \omega b_0} \simeq \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$). (6.25′)式便于和高频截面公式(6.24)比较. (6.25′)式中,方括号中的因子反映了低频端截面随频率 ν 的变化偏离 $\sigma(\nu) = \frac{\sigma_0}{\nu}$ 形式的程度,可以将它看成对

于频率反比规律的改正因子.

推广这一表示方法，对于任意频率值 ν，也可以将相应的辐射截面写为

$$\sigma(\nu) = g_{ff}(\nu, v)\frac{\sigma_0}{\nu} \tag{6.26}$$

式中的因子 $g_{ff}(\nu,v)$ 称为冈特因子，可以将它看成截面 $\sigma(\nu)$ 随 ν 的变化偏离高频截面公式，即频率反比律 $\sigma(\nu)=\frac{\sigma_0}{\nu}$ 的改正因子.

根据(6.25′)式可知，在低频端，即 $\nu\ll\frac{m_0v^3}{2\pi Ze^2}$ 时，冈特因子为

$$g_{ff}(\nu,v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{m_0v^3}{5.6Ze^2\nu}\right),$$

或者表为

$$g_{ff}(\nu,v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right). \tag{6.27}$$

而根据(6.24)式，在高频端，即当 $\nu\gg\frac{m_0v^3}{2\pi Ze^2}$，

$$g_{ff}(\nu,v) = 1 \tag{6.28}$$

(6.27)式和(6.28)式分别是韧致辐射低频端和高频端的冈特因子的经典公式. 已经指出，它适用的条件是电子速度 $v\gg Z\alpha_f c$，即温度不太高的情况.

6.2.3 韧致辐射谱——量子力学公式

当电子速度较大，使得 $v\gtrsim Z\alpha_f c$ 时，经典公式不再适用. 但正如在 6.2.1 小节最后指出的那样，对于低频端的射电谱而言，量子力学和经典结果基本上是相同的. 这里可以指出，仅有的量子力学修正是在低频谱功率 $P(\nu)$ 的公式(6.21)中[它是(6.20)第一式的等价形式]. 考虑到电子的波动性质，根据不确定原理，最小瞄准参量应取为 $b_{\min}\simeq a\frac{\hbar}{m_0v}$，$a$ 是量级为 1 的数值因子[见(6.22)式后面的讨论]，而不取经典值

$$b_{\min} \simeq b_0 = \frac{Ze^2}{m_0 v^2}.$$

事实上，这个修正是不大的. 例如，当电子温度 $T_e \simeq 10^5$K 时，速度 $\bar{v} \simeq 10^8$cm/s. 此时比值

$$b_{\min}^{经典}/b_{\min}^{量子} = \frac{\frac{Ze^2}{m_0 v^2}}{\frac{a\hbar}{m_0 \bar{v}}} \simeq 2.5a \qquad (a \simeq 1).$$

在高频端，量子力学的谱公式和经典谱显著地不同. 因此，我们现在的兴趣将集中于高频段的谱. 在量子力学处理中，轫致辐射被称为自由-自由跃迁过程. 在离子库仑场作用下，电子从速度为 v_i 的自由态跃迁到速度为 v_f 的另一自由态时，将发射光子，频率满足关系：

$$h\nu = \frac{1}{2}m_0 v_i^2 - \frac{1}{2}m_0 v_f^2. \tag{6.29}$$

注意，这里假定了离子是无限重的. 因此，在跃迁过程中，它不吸收能量，即不参与能量平衡. 但它仍可以吸收动量，原因是能量 $E_K = \frac{1}{2}MV^2$，动量 $p = M\dot{V}$，V 是核子碰撞后的速度，$V \sim 0$ 是个小量，故能量 E_K 是二阶小量.

由量子力学可以计算跃迁过程的概率，而跃迁概率的观念则直接和上节引入的微分截面 $\sigma(\nu)$ 联系着. 因此，用量子力学计算跃迁概率实质上就是计算 $\sigma(\nu)$，并可与经典理论的截面 $\sigma(\nu)$[见(6.24)和(6.25)式]作比较，由此看出两种理论的轫致谱形的不同.

假如把量子力学计算的截面 $\sigma(\nu)$ 也写成

$$\sigma(\nu) = g_{ff}(\nu, v)\,\frac{\sigma_0}{\nu}$$

的形式，则要比较 $\sigma(\nu)$ 的经典和量子结果，只需比较两种方法得到的冈特因子 $g_{ff}(\nu, v)$ 即可.

首先给出量子力学的跃迁概率公式. 按第二章的办法可以导

出，每秒产生的沿 Ω 方向单位立体角传播，偏振方向为 $\boldsymbol{l}$，能量为 $h\nu$ 的轫致光子的自发发射概率是

$$\frac{dp_s(\nu)}{d\Omega}=\left(\frac{e^2 2\pi\nu}{m_0^2c^3h}\right)|(e^{-ik\cdot r}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2\frac{dn}{dE}.\qquad(6.30)$$

读者不难从含时微扰论(2.22)式出发引出此式. 推导的主要依据是半经典的量子辐射理论(严格的理论应求助于量子电动力学，这超出了本书范围)，即为了求自发辐射概率，最好先求体系在外场中的感应辐射跃迁概率，由此可求出爱因斯坦感应辐射系数 b_{if}，然后利用(2.7)式定出自发辐射系数 a_{if}，从而得到自发发射概率. 具体办法如下：

(2.22)式给出在外场扰动下，体系由 i 态跃迁到 f 态的概率是

$$G_{if}=|a_f|^2=\frac{4\pi^2}{\hbar^2}|H'(\omega_{fi})_{fi}|^2,$$

如果含时微扰来自外界辐射场，则有(2.25)式，即

$$\hat{H}(x,t)=\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{A}(x,t)\cdot\hat{\boldsymbol{P}},$$

利用(2.25)式即得(2.26)式(推导见第二章)：

$$H'(\omega_{fi})_{fi}=\frac{1}{2\pi}\frac{e}{m_0c}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_{fi}t}(\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}dt.$$

若辐射外场是一束沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播，沿 $\boldsymbol{l}$ 偏振之平面波，则有(2.27)式：

$$\boldsymbol{A}(x,t)=A(t)\boldsymbol{l}\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}).$$

将(2.27)式代入(2.26)式，得到类似(2.29)式的结果，

$$H'(\omega_{fi})_{fi}=\frac{e}{m_0c}A(\omega_{fi})(e^{-ik\cdot r}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}.\qquad(2.29')$$

它和(2.29)式的不同之处只是没有作偶极近似，即不取 $e^{-ik\cdot r}\simeq1$，以便使以下讨论不失一般性. 把(2.29′)代入(2.22)式，得到 $i\to f$ 的感应跃迁概率是

$$G_{if}=\frac{4\pi^2}{\hbar^2}\frac{e^2}{m_0^2c^2}|A(\omega_{fi})|^2|(e^{-ik\cdot r}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2.$$

把外场 $\boldsymbol{A}(x,t)$ 的单色振幅 $A(\omega_{fi})$ 换用单色辐射能流 S_ν，S_ν 和 $A(\omega)$ 的关系在第二章已有详细推导，

$$S_\nu = 2\pi S_\omega = \frac{2\pi c}{T}|\varepsilon(\omega)|^2 = \frac{2\pi\omega^2}{Tc}|\boldsymbol{A}(\omega)|^2.$$

T 是辐射场作用时间，将上式代入，即得到

$$G_{if} = \frac{2\pi c^2 T}{h^2 m_0^2 c \nu_{fi}^2} S_\nu |(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2.$$

因此，单位时间由 $i \to f$ 的跃迁概率是

$$p_{if} = \frac{G_{if}}{T} = \frac{2\pi e^2}{h^2 m_0^2 c \nu^2}|(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2 S_\nu,$$

但根据(2.2)式引进的爱因斯坦感应辐射系数 b_{if} 的意义，这一跃迁概率又等于[注意(2.37)式]

$$p_{if} = \frac{b_{if}}{4\pi} S_\nu,$$

故得

$$b_{if} = \frac{8\pi^2 e^2}{h^2 m_0^2 c \nu^2}|(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2.$$

按照(2.7)式，自发发射系数 a_{if} 应为

$$a_{if} = \frac{h\nu_{fi}^3}{c^2} b_{if} = \frac{8\pi^2 \nu_{fi} e^2}{h m_0^2 c^3}|(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2$$

[注意，我们弃去(2.7)式中的因子 2，因为(2.7)式是关于自然光的公式，有两个独立的偏振方向].

有了 a_{if}，即可求出单位时间沿给定方向单位立体角的自发辐射概率了，由(2.1)式

$$dp_s = a_{if}\frac{d\Omega}{4\pi},$$

即得

$$\frac{dp_s(\nu)}{d\Omega} = \frac{e^2 2\pi\nu}{m_0^2 c^3 h}|(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2.$$

但由于自由-自由跃迁中，终态能量 E_f 可以连续变化，必须考虑跃迁到所有这些紧邻的连续终态的可能性，则跃迁概率要增大. 如果

能量在 E_f 附近的单位能间隔中的状态数记为$\frac{dn}{dE_f}$，称作状态密度. 则跃迁概率应为

$$\frac{dp_s(\nu)}{d\Omega}=\left(\frac{e^2 2\pi\nu}{m_0^2c^3\hbar}\right)|(e^{-ik\cdot r}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}|^2\frac{dn}{dE_f},$$

这就是(6.30)式.

有了自发跃迁概率，就可以求出微分辐射截面. 根据这一截面的意义，应有

$$\frac{d\sigma(\nu)}{d\Omega}=\frac{dp_s(\nu)}{d\Omega}\Big/v, \tag{6.31}$$

式中 v 是电子速度.

因此，用量子力学计算跃迁概率，目的就是计算微分辐射截面. 将$\frac{d\sigma(\nu)}{d\Omega}$对所有立体角积分，就得到微分截面 $\sigma(\nu)$.

精确计算概率$\frac{dp_s(\nu)}{d\Omega}$相当繁复，需要用到库仑场中的电子波函数. 通常采用玻恩近似来简化这一计算. 其主要目的就是找到初、终两态的近似的电子波函数 u_i, u_f，从而计算出(6.30)式中的矩阵元. 其主要办法是采用微扰论，把离子库仑势看作微扰，把零级电子波函数取为平面德布罗意波，波矢为 $\boldsymbol{k}$(即电子动量 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$)，考虑在库仑势微扰下，初、终两态的电子波函数的"变形"，即对平面波的偏离. 玻恩近似的适用条件，也就是能够把库仑势当作微扰的条件，可以由最小瞄准距离 $b_{\min}$的估计给出. 按不确定关系

$$b_{\min}\simeq K_e^{-1}=\frac{\hbar}{m_0v},$$

而在 $b_{\min}$ 下，库仑势已经就是最强的了. 这时比值

$$\left(\frac{Ze^2}{b_{\min}}\right)\Big/E_K=\left(\frac{Ze^2m_0v}{\hbar}\right)\Big/\frac{m_0v^2}{2}=\frac{2Z\alpha_fc}{v}.$$

由此可见，微扰论适用条件是上述能量比远小于 1. 因而玻恩近似适用条件是

$$v\gg Z\alpha_fc,$$

明确地说，就是要求电子初、终速度

$$v_i, v_f \gg Z\alpha_f c. \tag{6.32}$$

注意，玻恩近似中处理高速电子韧致辐射问题，仍需要求 v_i，$v_f \ll c$，否则就不能采用经典的量子力学理论，而需要借助狄拉克方程.

由于 v_i，v_f 满足相同不等式，所以彼此相差不太大. 按照(6.29)式，这表明辐射光子频率较低(例如 $h\nu \leqslant \frac{E_i}{2} = \frac{1}{4} m_0 v_i^2$). 这还表明玻恩近似将给出高速电子的"低频谱". 这里指的低频，是相对于电子速度而言，只要初、终速度 v_i，v_f 相差较少，则发射光子就算作低频的.

玻恩近似的具体作法是，先写出未受扰动的初、终两态的零级电子波函数(平面波)，

$$\begin{aligned} u_{i0} &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-i\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}}, \\ u_{f0} &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-i\boldsymbol{k}_f \cdot \boldsymbol{r}}, \end{aligned} \tag{6.33}$$

式中 $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{p}_i/\hbar$；$\boldsymbol{k}_f = \boldsymbol{p}_f/\hbar$.

利用一级微扰论得到波函数一级修正项是

$$u_{i1} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \left\{ \frac{\left(\frac{Ze^2}{r}\right)_{pi}}{E_i - E_p} \right\} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} d^3\boldsymbol{p}, \tag{6.34}$$

式中微扰矩阵元

$$\left(\frac{Ze^2}{r}\right)_{pi} = (2\pi)^{-3} \int \left(\frac{Ze^2}{r}\right) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}} d\tau.$$

关于 u_{f1}，也有类似 u_{i1} 的形式，不再列出.

有了(6.33)，(6.34)式，就得一级近似波函数为

$$u_i = u_{i0} + u_{i1}, \quad u_f = u_{f0} - u_{f1}.$$

利用得到的波函数，即可计算(6.30)式中的矩阵元$(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})_{fi}$. 这样得到四个积分项的和，其中第一项就是算符$(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})$关于零级波函数 u_{i0}，u_{f0}的矩阵元. 显然，积分值正比于 $\delta(\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k})$. $\hbar\boldsymbol{k}_i$，$\hbar\boldsymbol{k}_f$，$\hbar\boldsymbol{k}$ 分别表示初、终态电子以及韧致光子的动量，由于过程中离子吸收了一部分动量，参与了动量交换，因而 $\boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f - \boldsymbol{k}$

$\neq 0$，故首项积分为零，$\delta(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f-\boldsymbol{k})=0$.

还有一项积分是同一算符关于一级修正波函数 u_{i1}，u_{f1} 的矩阵元，是个二级小量，可以略去. 剩下两个积分是

$$\begin{aligned}&\int u_{f0}(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})u_{i1}d\tau,\\&\int u_{f1}(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})u_{i0}d\tau.\end{aligned}\tag{6.35}$$

(6.35)式两个积分才最后进入(6.30)式的计算中.

最后，关于(6.30)式中的状态密度 $\dfrac{dn}{dE_f}$(表示单位体积中终态能量 E_f 附近单位能量间隔中的状态数)可以这样求得：把终态电子动量和能量分别记为 $\boldsymbol{p}_f$ 和 E_f，轫致光子动量和能量分别记为 $\hbar\boldsymbol{k}\left(\text{其大小为}\hbar|\boldsymbol{k}|=\dfrac{h\nu}{c}\right)$ 及 $h\nu$. 注意，轫致过程中能量守恒，即 $E_i=E_f+h\nu$，但动量不守恒(原因是核吸收动量)，即 $\boldsymbol{p}_i\neq\boldsymbol{p}_f+\hbar\boldsymbol{k}$. 因此，$\hbar\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}_f$ 是彼此无关的. 由此可见，终态的状态密度应为光子状态密度和电子态密度的乘积. 终态动量为 $\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_f+d\boldsymbol{p}_f$ 的电子态数目是

$$\frac{dp_xdp_ydp_z}{h^3}=\frac{p_f^2dp_fd\Omega_f}{h^3}$$

(用球极坐标表示体元 $d\boldsymbol{p}$，终态电子射向 Ω_f 方向的立体角元 $d\Omega_f$ 中). 利用相对论关系，

$$E_f^2=c^2p_f^2+m_0^2c^4,$$

得到

$$E_fdE_f=c^2p_fdp_f.$$

因此，电子态数也可写成

$$\frac{p_fE_fdE_fd\Omega_f}{h^3c^2}.$$

类似地写出光子态数目是

$$\frac{1}{h^3}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2d\left(\frac{h\nu}{c}\right)d\Omega_k,$$

亦即光子态数是

$$\frac{1}{c^3}\nu^2 d\nu d\Omega_k.$$

把两个态密度相乘，得到终态的状态密度是

$$\frac{dn}{dE_f} = \frac{p_f E_f d\Omega_f \nu^2 d\nu d\Omega_k}{h^3 c^5}.$$

这样跃迁概率$\frac{dp_i(\nu)}{d\Omega}$[为了更清楚起见，微分截面$\frac{d\sigma(\nu)}{d\Omega}$改写为$\sigma(\Omega_f,\Omega_k,\nu)$]的计算可以按(6.30)式进行下去. 一般情况下，计算很复杂. 但是在非相对论电子玻恩近似下，有

$$\frac{h\nu}{c} \ll p_f - p_i, \tag{6.36}$$

即发射光子动量远小于电子动量改变. 这时计算可以大为简化. 以上不等式实质上即为经典偶极近似条件[①]$v_i, v_f \ll c$.

偶极近似下算出的微分辐射截面有简单形式(例如，见 Franck-Kamenetskii，1962，第六章)：

$$\sigma(\Omega_f,\Omega_k,\nu) = \left(\frac{2Z^2}{\pi^2}\right)\alpha_f^3 q^{-2}\nu^{-1}\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\cos^2\theta, \tag{6.37}$$

式中 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f$ 表示电子动量变化的波矢，θ 为 $\boldsymbol{q}$ 与辐射光子偏振方向 $\boldsymbol{l}$ 的夹角. 完成对所有立体角的积分，即得到总微分截面，写成标准形式为

$$\sigma(\nu) = g_{ff}(\nu,v)\sigma_0/\nu,$$

---

① 这一不等式不难得到，因为非相对论电子动能为$\frac{1}{2}m_0v^2$，故(6.29)式为

$$h\nu = E_i - E_f = \frac{1}{2}m_0(v_i^2 - v_f^2),$$

或者

$$h\nu = \frac{1}{2}(p_i - p_f)(v_i + v_f).$$

由此可见

$$\frac{h\nu/c}{p_i - p_f} = \frac{v_i + v_f}{2c}.$$

但在非相对论情况下，$v_i, v_f \ll c$(偶极近似)，故得(6.36)式，这也同时说明了(6.36)式与经典偶极近似条件的等价性.

其中

$$g_{ff}(\nu,v)=\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left\{\frac{(v_i+v_f)}{(v_i-v_f)}\right\},\qquad(6.38)$$

此即玻恩近似下得到的 $\sigma(\nu)$ 和冈特因子 g_{ff}. 该式成立的条件是

$$c\gg v_i,v_f\gg Z\alpha_f c.$$

由(6.38)式可见,对于高速电子($v\gg Z\alpha_f c$,但仍要求$\ll c$)的"低频"辐射$\left(h\nu\leqslant\frac{E_i}{2}\right)$,玻恩近似给出的冈特因子 $g_{ff}>1$,并随着频率的增大(这体现在速度差 v_i-v_f 的逐渐增大)而慢慢下降;到 $h\nu=\frac{E_i}{2}$时,$g_{ff}=0.97$.

可以把用玻恩近似计算的量子结果(6.38)式和经典结果(6.27)式及(6.28)式作比较,可见两者形式不同.但是在频率很低情况下,(6.38)式对数的宗量成为

$$\frac{v_i+v_f}{v_i-v_f}=\frac{(v_i+v_f)^2}{v_i^2-v_f^2}\simeq\frac{4v_i^2}{\frac{2}{m_0}h\nu}=\frac{2m_0v_i^2}{h\nu},$$

从而(6.38)化为

$$g_{ff}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\left(\frac{2m_0v_i^2}{h\nu}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{\frac{2v_i}{\omega}}{\hbar/m_0v_i}\right)$$

$$\simeq\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}^{量子}}\right).\qquad(6.38')$$

这表明,在 $v_i\simeq v_f$ 的低频极限下,它和经典值 g_{ff}[见(6.27)式]的唯一不同,仅在于对数的宗量中用 $b_{\min}^{量子}=\frac{\hbar}{m_0v_i}$代替了

$$b_{\min}^{经典}=\frac{Ze^2}{m_0v_i^2}=b_0,$$

证实了本节开头的讨论.

经典理论和量子力学的玻恩近似分别给出了两个极端情况下的轫致辐射谱,前者适用于 $v\ll Z\alpha_f c$ 情况,后者适用于 $v\gg Z\alpha_f c$. 对于一般中间速度情况,即 $v\gtrsim Z\alpha_f c$(显然这时仍必须用量子理论),

或者尽管初速 $v_i \gg Z\alpha_{f}c$，但产生高频辐射情况(例如 $h\nu \simeq \frac{1}{2}m_0 v_i^2$，即电子将全部初动能变成了轫致光子能量，这常称为硬光子极限)，这时终速 v_f 不再远大于 $Z\alpha_{f}c$. 这两种情况下玻恩近似不再适用. 在比玻恩近似更宽的条件下，即在更宽的频率范围和更宽的电子速度范围中，可以有以下很精确的近似公式(Elwert，1939，*Ann. Physik*，**34**，178)，

$$g_{ff}(\nu,v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\left(\frac{v_i}{v_f}\right)\frac{1-\exp\left(-\frac{4\pi^2 Ze^2}{hv_i}\right)}{1-\exp\left(-\frac{4\pi^2 Ze^2}{hv_f}\right)}\ln\left(\frac{v_i+v_f}{v_i-v_f}\right), \tag{6.39}$$

v_i，v_f 分别是电子的初、终速度. 显然，在高速(v_i，$v_f \gg Z\alpha_{f}c$)、低频($v_i \simeq v_f$)情况下，(6.39)式还原为玻恩近似公式(6.38).

按照 Elwert 公式(6.39)求出的几种饶有趣味情况下的 g_{ff}值列于表 6.2 中. 由表 6.2 可以看出 g_{ff}的一般特点如下：

在"低频"情况[只要电子初、终态速度相近，$v_i \simeq v_f$，就称为"低频"辐射，见(6.29)式]，不论电子初速 v_i 大小，都有 $g_{ff}>1$.

表 6.2

v_i	v_f	g_{ff}
$\gg 2\pi Z\alpha_{f}c$	$\gg 2\pi Z\alpha_{f}c$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{v_i+v_f}{v_i-v_f}\right)>1$(玻恩近似)
$\gg 2\pi Z\alpha_{f}c$	$\simeq 0$	(6.9)$Z\alpha_{f}c/v_i \ll 1$
$= 2\pi Z\alpha_{f}c$	$=\frac{v_i}{2}$	0.89
$= 2\pi Z\alpha_{f}c$	$\simeq 0$	0.69
$\ll 2\pi Z\alpha_{f}c$	$\simeq v_i$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln\left(\frac{m_0 v^3}{5.5Ze^2\nu}\right)>1$(经典公式)
$\ll 2\pi Z\alpha_{f}c$	$\simeq\frac{v_i}{2}$	1.2
$\ll 2\pi Z\alpha_{f}c$	$\simeq 0$	1.1

在"中频"情况(相应于电子末速度 $v_f \simeq \frac{1}{2}v_i$ 的情况)，$g_{ff} \simeq 1$；

同样，不论电子初速 v_i 大小如何，这点都是对的.

在"高频"时（即末速度 $v_f\simeq 0$ 的辐射，称为硬光子极限），g_{ff} 的性质比较复杂．有三种情况：

1．当初速度 $v_i\gg Z\alpha_f c$ 时，$g_{ff}\ll 1$，不过仍为有限值.

2．当初速 $v_i\simeq Z\alpha_f c$，为中等值，则 g_{ff} 略小于 1.

3．当初速很小，$v_i\ll Z\alpha_f c$，g_{ff} 略大于 1. 因此，只是在"高频"情况（即硬光子发射）下，冈特因子值才显著依赖于电子初速度 v_i.

对于给定的 v_i 和频率 ν，有了 $g_{ff}(\nu, v_i)$ 值，即定出了截面 $\sigma(\nu)d\nu$，从而给出轫致辐射谱 $P(\nu)d\nu$.

§6.3　轫致辐射的总功率

有了轫致辐射的谱功率，即可通过对各种频率的积分，找到一个电子由于轫致辐射而在单位时间中损失的总能量，即辐射总功率. 按照（6.23′）式，对于一个给定速度 v_i 的电子，其谱功率 $P(\nu)d\nu$ 可用截面 $\sigma(\nu)$ 表示，

$$P(\nu)d\nu = N_Z v_i h\nu\sigma(\nu)d\nu.$$

对频率 ν 作积分，即得电子轫致辐射总功率：

$$P = \frac{dW}{dt} = N_Z v_i\int_0^{E_i/h} h\nu\sigma(\nu)d\nu.$$

选上限为 E_i/h 的理由是：对于一个能量为 $E_i=\frac{1}{2}m_0v_i^2$ 的入射电子，它所辐射的光子的最高频率 ν_m 由条件

$$h\nu_m = E_i$$

决定. 以上积分可表为

$$P = \frac{dW}{dt} = hN_Z v_i\sigma_0\int_0^{E_i/h} g_{ff}(\nu, v_i)d\nu.$$

但考虑到量子理论的冈特因子不显含 ν[见（6.38）式及（6.39）式]，而是通过 v_i、v_f 依赖于 ν. 因此，积分变数最好用 v_f 代替 ν. 按照（6.29）式

$$h\nu = \frac{1}{2}m_0(v_i^2 - v_f^2),$$

故

$$h d\nu = -m_0 v_f dv_f,$$

因此

$$P = N_Z v_i \sigma_0 m_0 \int_0^{v_i} g_{ff}(v_f) v_f dv_f.$$

利用玻恩近似的 g_{ff} 值(6.38)式，完成以上积分，结果是

$$P = \left(\frac{3.46}{\pi}\right) N_Z v_i \sigma_0 E_i = \left(\frac{16}{3}\right) N_Z Z^2 \alpha_f r_0^2 m_0 c^2 v_i. \quad (6.40)$$

式中 r_0 是电子经典半径，$\alpha_f = \frac{1}{137}$ 是精细结构常数. 把 σ_0 换写的理由是，σ_0 中含有电子初速度 v_i，

$$\sigma_0 \equiv \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \alpha_f^3 K_e^{-2} Z^2, \qquad \text{而 } K_e^{-1} \equiv \frac{\hbar}{m_0 v_i}.$$

由(6.40)式可见，非相对论电子韧致辐射总功率 P 与电子速度 v_i 及离子密度 N_Z 成正比. 由于采用了玻恩近似，因而(6.40)式有一定误差. 玻恩近似公式(6.38)的准确范围是在低频部分($0 \leqslant h\nu \leqslant \frac{1}{2} E_i = \frac{1}{4} m_0 v_i^2$). 在高频端，

$$h\nu \simeq E_i = \frac{1}{2} m_0 v_i^2,$$

玻恩近似不再适用. 如果仍然套用(6.38)式，则求出的 $\sigma(\nu) \to 0$，这比实际的高频辐射截面小. 因此，(6.40)式给出的总功率低于真实值. 对于高速电子，用玻恩近似(6.40)式计算的功率误差为 $2\pi Z \alpha_f c / v_i$，是可以忽略不计的. 低速情况下，误差可达～50%.

§6.4 电子系集体的韧致辐射，谱发射系数和发射系数

根据前面给出的单个电子的谱功率 $P(\nu)d\nu$ 和总功率 P，不难找到韧致辐射的谱发射系数 $j(\nu)d\nu$ 以及发射系数 j. 按照(6.23′)式，一个速度为 v_i 的电子在 ν—$\nu+d\nu$ 频率间隔中的辐射功率为

$$P(\nu)d\nu = N_Z v_i h\nu \sigma(\nu, v_i) d\nu.$$

因此，如果单位体积中速度为 v_i—v_i+dv_i 的电子数为 $N(v_i)dv_i$，

则这些电子的单色辐射功率应为

$$N(v_i)dv_iP(\nu)d\nu = N_Z N(v_i)v_ih\nu\sigma(\nu,v_i)dv_id\nu.$$

考虑到各种初速度 v_i 的电子对 ν—$\nu+d\nu$ 范围的单色辐射的贡献，应该对上式中的速度 v_i 求积分. 由此得到谱发射系数为

$$j(\nu)d\nu = \int_{\left(\frac{2h\nu}{m_0}\right)^{1/2}}^{\infty} N_Z N(v_i)v_ih\nu\sigma(\nu,v_i)dv_id\nu,$$

亦即

$$j(\nu) = N_Z\int_{\left(\frac{2h\nu}{m_0}\right)^{1/2}}^{\infty} N(v_i)h\nu\sigma(\nu,v_i)v_idv_i.$$

积分下限由关系式$\frac{1}{2}m_0v_i^2 \geqslant h\nu$ 给出，即仅当电子动能不小于频率 ν 的光子能量 $h\nu$ 时，该电子对频率 ν 的辐射才是有贡献的.

用冈特因子 g_{ff} 表示截面，$\nu\sigma(\nu)\equiv g_{ff}\sigma_0$，则

$$j(\nu) = N_Z h\int_{\left(\frac{2h\nu}{m_0}\right)^{1/2}}^{\infty} \sigma_0 g_{ff}(\nu,v_i)N(v_i)v_idv_i. \qquad (6.41)$$

这里必须注意，σ_0 是速度 v_i 的函数，

$\sigma_0 \equiv \left(\frac{16\pi}{3\sqrt{3}}\right)\alpha_f^3K_e^{-2}Z^2$，而 $K_e^{-1}\equiv\frac{\hbar}{m_0v_i}$. 显然，要完成这一积分计算，首先需要给出电子的速度分布 $N(v_i)$，一般感兴趣的是热平衡等离子体的轫致辐射，其中电子速度具有麦克斯韦分布，即单位体积中速度为 v_i—v_i+dv_i 的电子数为

$$N(v_i)dv_i = 4\pi N_e\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0v_i^2}{2kT}}v_i^2dv_i. \qquad (6.42)$$

式中 N_e 为单位体积中电子数，代入(6.41)式中，再考虑到 g_{ff} 随 v_i 的变化是缓慢的，g_{ff} 是一个在 1 附近微小摆动的数(见表 6.2，其中除第 2 行外，g_{ff} 值都在 1 附近，而第 2 行表示高速电子的硬光子发射，即极高频发射. 由于现在 ν 已给定，这一情况可以排除). 因此，可近似将 g_{ff} 因子提出积分号外，并用平均冈特因子 $\bar{g}_{ff}$ 代替. 由此可完成积分，得到

$$j(\nu) \simeq \left(\frac{128\pi}{3\sqrt{3}}\right)N_eN_ZZ^2\left(\frac{e^2}{c}\right)r_0^2c\left(\frac{c}{v_{\text{th}}}\right)\bar{g}_{ff}(\nu,T)e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$=6.8\times10^{-38}Z^2N_eN_ZT^{-\frac{1}{2}}\bar{g}_{ff}(\nu,T)e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$(\mathrm{erg}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{cm}^{-3}\cdot\mathrm{Hz}^{-1}).\qquad(6.43)$$

式中 $\bar{v}_{\mathrm{th}}=\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$ 代表温度 T 下的电子平均热运动速度，$\bar{g}_{ff}$ 为温度 T 下的平均冈特因子，而 $r_0=\dfrac{e^2}{m_0c^2}$ 是电子经典半径. 表 6.3 列出各种温度和频率下的平均冈特因子.

表 6.3

T(K)		ν(Hz)	$\bar{g}_{ff}(\nu,T)$
经典	$<3\times10^7Z^2$	$<10^9T^{3/2}$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\left[17.7+\ln\left(\dfrac{T^{3/2}}{\nu Z}\right)\right]$
	$<3\times10^5Z^2$	$>10^9T^{3/2}$	$\simeq1$
量子	$>3\times10^5Z^2$	$\ll kT/h$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\ln(2.2kT/h\nu)$
	$>3\times10^5Z^2$	$\simeq kT/h$	$\simeq1$
	$>3\times10^5Z^2$	$>kT/h$	$\simeq\left(\dfrac{kT}{h\nu}\right)^{0.4}$ *

经典（"低温"）情况下，按照(6.20)式，高低频分界是 $\omega_c\simeq\dfrac{\bar{v}}{b_0}=\dfrac{m_0\bar{v}^3}{2Ze^2}$，或 $\nu_c\simeq\dfrac{m_0\bar{v}^3}{4\pi Ze^2}$，而平均速度 $\bar{v}\simeq\sqrt{\dfrac{kT}{m_0}}$，故高低频分界是 $\nu_c\sim10^9T^{3/2}$.

* 量子理论（"高温"）情况下，高频段的 $\bar{g}_{ff}$ 值详见 Gorenstein, P., Gursky, H. and Garmire, G. (1968), *Ap. J.*, **153**, 885.

由(6.43)式看出：第一，韧致谱发射系数 $j_\nu\propto N_eN_Z$；其次，j_ν 和温度关系密切，这主要体现在公式的指数因子中. 当温度 T 升高时，j_ν 做指数方式的增加；第三，热韧致辐射的谱型很有特点. 对于 $h\nu\ll kT$ 的低频部分，由于 $\exp(-h\nu/kT)\simeq1$，故谱很平，j_ν 几乎和 ν 无关，$j_\nu\propto\nu^0$. 这种平谱成了热韧致辐射的标志之一. 但另一方面，对 $h\nu\gtrsim kT$ 的高频部分，有 $j_\nu\propto e^{-h\nu/kT}$，即 j_ν 随 ν 指数下降，是陡谱. 的确，在许多弥漫的射电源中观测到较平的连续谱，可以有把握的认为，这是自由电子-离子碰撞造成的热韧致辐射. 同样，有许多宇宙 X 射线源中，X 射线随频率作指数下降，韧致辐射是一个很可能的机制.

高低频段的分界大体由 $h\nu \simeq kT$ 来定. 至于为什么热轫致辐射有平谱特征,这已经在上面说到,即电子以大瞄准距离 b 和正离子相碰撞的机会较多,但这种碰撞产生能量 $h\nu$ 小的光子;相反,小瞄准距离碰撞次数少,但每次碰撞产生的光子能量较高,结果使谱功率 P_ν 几乎与频率无关(平谱). 另一个问题是如何从物理上说明当 $h\nu \gtrsim kT$ 时,轫致谱会指数式陡降,这是因为轫致光子能量 $h\nu$ 取自自由电子动能 $\frac{1}{2}mv^2$,当然应有不等式 $h\nu \leqslant \frac{1}{2}m\bar{v}^2 \simeq kT$. 故当 $h\nu > kT$ 时,会有 j_ν 的指数陡降. 从高、低频分界点 $\nu \simeq kT/h$ 可以知道,随温度的增加,热轫致辐射的平谱($\sim \nu^0$)范围会向高频端延展. 例如对于 $T \sim 3,000$K 等离子体,平谱可延展到红外连续谱部分.

如考虑了等离子体中各种离子成分,则(6.34)式应对 Z 求和,出现一个因子 $S = \sum N_e N_Z Z^2$. 对于一般宇宙等离子体,其丰度情况为:氢占~90%,氦约占 9%,其它重元素~1%. 因此,最重要的是氢和氦离子. 对于完全电离的等离子体,再考虑到电中性条件 $N_e = \sum ZN_Z$,结果得到

$$S = 1.4N_e^2. \tag{6.44}$$

将(6.43)式对 Z 求和,并对频率积分,得到总发射率 $j(T)$,

$$j(T) = \sum_z \int_0^\infty j(\nu,T)d\nu = \left(\frac{128\pi}{3\sqrt{3}}\right) S\left(\frac{e^2}{c}\right) \cdot r_0^2 c\left(\frac{c}{v_{\text{th}}}\right)\int_0^\infty \bar{g}_{ff}(\nu,T)e^{-\frac{h\nu}{kT}}d\nu.$$

上面的积分中,用新变数 $\frac{h\nu}{kT}$ 代替 ν,并注意 $\alpha_f \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$,则有

$$\begin{aligned} j(T) &= \left(\frac{64}{3\sqrt{3}}\right)\alpha_f r_0^2 c\left(\frac{c}{v_{\text{th}}}\right) \cdot kTS\bar{g}_{ff}(T) \\ &= 1.4 \times 10^{-27} T^{1/2} S g_{ff}(T) \quad (\text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}) \end{aligned} \tag{6.45}$$

式中 $g_{ff}(T) \equiv \int_0^\infty \bar{g}_{ff}(\nu,T)e^{-\xi}d\xi$, $\xi = \frac{h\nu}{kT}$. 利用表 6.3 的近似公式 $\bar{g}_{ff}(\nu,T)$,可以计算得 $g_{ff}(T)$. Karzas 和 Latter 曾经证明,对于 $T \gtrsim 10^6$K,

$$g_{ff}(T) = 1.2 \pm 10\%.$$

利用这一 $g_{ff}(T)$ 值及(6.44)式给出的 S，得到

$$j(T) = 2.4 \times 10^{-27} T^{1/2} N_e^2 \quad (\mathrm{erg} \cdot \mathrm{cm}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{-1}) \quad (6.46)$$

对于 $T > 10^7\mathrm{K}$ 的高温等离子体，韧致辐射是其主要的冷却机制，冷却时间量级是

$$t_{ff} = \frac{3}{2} N_e kT / j(T) = 1.8 \times 10^{11} \sqrt{T} / N_e \quad (\mathrm{s}).$$

我们上面是对谱发射系数求积分得到总发射(6.45)式或(6.46)式的. 其实也可以直接利用经典偶极辐射公式(1.19)简单导出发射率 $j(T)$，结果和(6.45)式符合甚佳. 按照(1.19)式，电子的瞬时总功率为

$$P = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{Ze^2}{m_0 r^2}\right)^2.$$

因此，电子的瞬时辐射功率值取决于它和离子的接近程度，即 r 值的大小. 假定电子的密度是 N_e，则对于等离子体中任一个给定的离子而言，与这一离子距离为 $r - r + dr$ 的电子数应为 $4\pi r^2 dr N_e$；考虑到周围所有电子与该离子的碰撞，则该离子对韧致辐射的贡献是

$$dP = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{Ze^2}{m_0}\right)^2 N_e \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{4\pi r^2 dr}{r^4}$$
$$= \frac{8\pi}{3} \frac{N_e Z^2 e^6}{m_0^2 c^3 r_{\min}}.$$

这里，下限取一个有限值 $r_{\min}$，对于避免积分的发散来讲是必要的，而物理上的原因是根据不确定关系. 已经指出，由于电子的波动性，轨道观念是近似的描写，轨道的“宽度”

$$\Delta r \simeq \frac{h}{\Delta p} \geqslant \frac{h}{p},$$

p 是电子动量. 因此，当电子到离子距离 r 小于 ΔX 时，经典观念失效，距离概念成为没有意义的了. 因此，取 $r_{\min} \simeq \Delta x \simeq \dfrac{h}{\Delta p} = \dfrac{h}{m_0 v}$ 是合理的. 如果电子温度是 T，则电子的平均热运动速度为

$$\bar{v}_{\text{th}} \simeq \sqrt{\frac{kT}{m_0}},$$

故

$$r_{\min} \simeq \frac{h}{m_0\sqrt{\frac{kT}{m_0}}},$$

因而

$$dP \simeq \frac{8\pi}{3}\frac{Z^2e^6N_e}{m_0c^3\hbar}\sqrt{\frac{kT}{m_0}}.$$

如果单位体积中离子数是 N_Z，则单位体积的总辐射功率——发射率 $j=N_Zdp$，结果得

$$j \simeq \frac{8\pi Z^2e^6N_ZN_e}{3m_0c^3h}\sqrt{\frac{kT}{m_0}}. \tag{6.47}$$

§6.5 自由-自由吸收

当电子与离子发生碰撞时，不仅可能发射光子，也有可能吸收光子，同时电子从动能较低的自由态跃迁到动能大的自由态. 这样的吸收过程常称为逆轫致吸收或自由-自由吸收. 自由-自由吸收系数 $k(\nu)$很容易计算得到. 对于一个热平衡的温度为 T 的等离子体，基尔霍夫定律(3.12)式成立，即

$$\left(\frac{j(\nu)}{4\pi}\right)\Big/k(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}. \tag{3.12}$$

该式表明，只要已知轫致辐射的谱发射率 $j(\nu)$，就可定出自由-自由吸收系数 $k(\nu)$. 注意，在上式中 $j(\nu)$除以 4π，原因是在辐射转移理论中，谱发射率(也称为谱发射系数)$j(\nu)$的定义和本章略有不同(第三章定义为单位体积单位时间在频率为 ν 附近的单位频率间隔中沿单位立体角辐射的能量，单位是 $\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-3}\cdot\text{Hz}^{-1}\cdot\text{sr}^{-1}$)因此，把上节导出的谱发射率(6.43)式代入(3.12)式时，应该除以总立体角 4π(等离子体的轫致辐射显然是各向同性的).

将(6.43)式代入(3.12)式，即得到

$$k(\nu)=\left(\frac{c^2}{2h\nu^3}\right)(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1)\left(\frac{j(\nu,T)}{4\pi}\right)$$

$$=3.7\times10^8\nu^{-3}(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})T^{-\frac{1}{2}}N_eN_ZZ^2\overline{g}_{ff}(\nu,T)\quad(\mathrm{cm}^{-1}).$$

$$(6.48)$$

由(6.48)式可见，自由-自由吸收系数与频率 ν 关系密切，高频部分吸收很弱. 对于 X 射线，等离子体几乎不产生吸收(恒星内部的致密物质除外). 但对低频部分，如射电辐射，这种吸收就很重要；甚至对很稀薄的等离子体，射电频段的自由-自由吸收都是不能忽视的. 一般认为，很多射电源的低频谱形状就是由自由-自由吸收决定的. 对于 $h\nu\ll kT$ 的低频部分，有

$$k(\nu)=0.018\times Z^2N_eN_Z\frac{\overline{g}_{ff}(\nu,T)}{\nu^2T^{3/2}}\quad(\mathrm{cm}^{-1}).\qquad(6.49)$$

§6.6 对轫致辐射的一些补充讨论

6.6.1 电子-原子碰撞产生的轫致辐射

电子和原子碰撞同样引起电子加速，产生轫致辐射，但发射率远小于电子-离子碰撞. 原因是原子中电子云对核子库仑场的屏蔽效应，使得仅当入射电子瞄准距离 b 不超过原子半径 R_a 时，才产生碰撞加速；因为这时入射电子能穿进原子中电子云，受到原子核库仑场作用. 如果把电子-原子碰撞截面取作 πR_a^2，电子-离子碰撞截面近似取为 πb_0^2，$b_0=\frac{Ze^2}{m_0v^2}$，则两种情况下发射率的比值是

$$j_{\text{电子-原子}}/j_{\text{电子-离子}}\simeq\left(\frac{R_a}{b_0}\right)^2\left(\frac{N_a}{N_i}\right)\simeq\left(\frac{T}{10^5Z^2}\right)^2\left(\frac{N_a}{N_i}\right),\quad(6.50)$$

其中 N_a 是原子数密度，N_i 是离子数密度.

可以根据(6.50)式对等离子体中电子-原子碰撞产生的轫致辐射作一估计. 例如，对由氢气组成的等离子体，$Z=1$. 若电离度为 50%，$T\simeq10^4$K，则有

$$j_{\text{电子-原子}}/j_{\text{电子-离子}}\simeq1\%.$$

6.6.2 电子-电子的四极矩辐射

已经指出，电子-电子碰撞不会产生偶极辐射，但仍然可以产生四极辐射. 四极辐射的功率一般远小于偶极辐射，只是偶极辐射的$\left(\frac{v}{c}\right)^2$的量级. 但是对于很高温度的炽热等离子体，四极辐射不可忽略. 对于具有麦克斯韦分布的等离子体，Gould 曾导出以下公式(1975)：

$$j_{电子-电子}/j_{电子-离子} \simeq \left(\frac{N_e}{Z^2 N_Z}\right)\left(\frac{kT}{m_0c^2 + 0.79kT}\right), \quad (6.51)$$

其中 N_e、N_Z 分别代表电子和离子的密度.

6.6.3 相对论电子的轫致辐射

以上只是讨论了非相对论电子($v \ll c$)的轫致辐射. 对于相对论电子，能量应当是

$$E = (c^2p^2 + m_0^2c^4)^{1/2}.$$

这时轫致辐射截面的计算要按狄拉克方程进行，用狄拉克波函数代替薛定谔波函数，而(6.30)式中的动量算符 $\boldsymbol{P}$ 应用 $mc\boldsymbol{a}$(狄拉克算符)代替，

$$\boldsymbol{a} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

σ 是泡利矩阵.

计算相对论电子的辐射截面 $\sigma(\nu)$，仍然可以采用玻恩近似，即 E_i、$E_f \gg$ 离子库仑势. 对于极相对论电子，当终态动量 $p_f \gg m_0c$ 时，则有(参见 Heitler，第 5 章，1954)

$$h\nu\sigma(\nu) = 4Z^2\alpha_f r_0^2\left[1 + \left(\frac{p_f}{p_i}\right)^2 - \left(\frac{2p_f}{3p_i}\right)\right]\left[\ln\left(\frac{2p_f p_i}{m_0 h\nu}\right) - \frac{1}{2}\right]. \quad (6.52)$$

而当 $p_f \ll m_0c$ 时，

$$h\nu\sigma(\nu) = 2Z^2\alpha_f r_0^2\left(\frac{p_f}{m_0c}\right) \quad (6.53)$$

特别是当 $p_f \simeq 0$，即 $h\nu \simeq E_i$ 时，$\sigma(\nu) \simeq 0$.

由(6.52)式及(6.53)式可见，$\nu\sigma(\nu)$ 将随着频率 ν 的下降而缓慢增大. 这表明相对论电子的韧致谱形 $P(\nu)d\nu$ 的定性行为和非相对论电子是相同的，即频率越低，辐射越强.

对于极端相对论电子，辐射总功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = 4Z^2\alpha_f r_0^2 c N_Z E_i \Xi, \tag{6.54}$$

其中

$$\Xi = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{2p_i}{mc}\right) - \dfrac{1}{3}, & r \ll 137Z^{-\frac{1}{3}}(\text{无屏蔽情况})； \\ \ln(183Z^{-\frac{1}{3}}) + \dfrac{2}{9}, & r \gg 137Z^{-\frac{1}{3}}(\text{完全屏蔽情况}). \end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Bekefi, G., Radiation Processes in Rlasnas, Wiley, New York, 1966.

[2] Bethe, H. anc Salpeter, E. Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms, Academic Press. New York, (1957).

[3] Elwert, G., *Ann. Physik*, **34**(1939), 178.

[4] Elwert, G., *Z. Naturforsch*. **3a**(1948), 477.

[5] Feynman, R., Quantum Eleetrodynamics, Benjamin, New York, 1962.

[6] Frank-Kamenetskii, D., Physical Processes in Stellar Interiors, Jerusalem, Israel Pragram for Scientific Translation, 1962.

[7] Giacconi, R. and Gursky, H., X-Ray Astronomy, Reidel, Dordrecht, 1974.

[8] Gorenstein, P. Gursky, H. and Garmire, G., *Ap. J.*, **153**(1968), 885.

[9] Gould, R., *Am. J. Phys.*, **38**(1970), 189.

[10] Heitler, W. The Quantum Theory of Radiation. Oxford Univ. Press, London, (1954).

[11] Jackson, J., Classical Electrodynamics, Wiley. New York, 1962. (有中译本)

[12] Landau, L. and Lifshitz, I., *The classical Theory of Fields, Wesley. Mass., Addison*, 1962.

[13] Novikov, I. and Thorne, K., in Black Holes. ed. C. Dewitt, Gorden and Breach, New York, 1973.

[14] Sommerfeld, A., Atombau and Spektrallinien, Bd. II, Braunschweig Vieweg, 1939.

[15] Tucker, W., Radiation Processes in Astrophysics, MIT Press, Cambridge, Mass., 1976.

第七章 复合辐射，复合线

作为自由-自由跃迁的轫致辐射，电子的初态和终态都是自由态，但轫致辐射并非等离子体中自由电子热辐射的唯一机制，电子还可能以另一种方式和离子相遇．当动能为 E_i 的自由电子飞过带电 $+Ze$ 的离子近旁时，可能被离子俘获，复合成净电荷是 $+(Z-1)e$ 的离子，同时还会产生辐射，称为复合辐射．这种伴随辐射的复合过程，也和轫致辐射一样，是热的等离子体的一种冷却方式．若复合形成的净电荷为 $(Z-1)e$ 的离子是处在主量子数为 n 的激发态上，并把该态的能量记为 $-I_{Z-1,n}$，则这一复合过程所辐射的光子能量为

$$h\nu = E_i + I_{Z-1,n}. \qquad (7.1)$$

由于电子初态能量 E_i 可连续取值，所以由(7.1)式可见，光子能量可取大于 $I_{Z-1,n}$ 的任意值，即复合辐射谱是带有边界的连续谱，边界频率是 $I_{Z-1,n}/h$.

复合辐射和轫致辐射是相似的物理过程，只不过在复合辐射过程中，电子的终态成为束缚态．因此，复合辐射又称做自由-束缚跃迁过程．

复合辐射与轫致辐射也有明显的不同，只需举出两点即可：1. 两者常有不同的辐射频段．例如，对于一个温度 $T\sim10^4$K 的等离子体，轫致辐射主要是对射电波段连续谱区有贡献（第六章指出，轫致谱特征是低频端较强，谱功率随频率增大而缓慢下降）；而复合辐射则主要出现于光学波段连续区．2. 轫致辐射只产生连续谱，但复合辐射除可产生连续谱外，又可在复合到高激发态后通过向低能级的跃迁方式（称为级联跃迁过程）发射谱线．在天体物理中，相当多的光学谱线和射电谱线是通过这种复合-级联方式产生的．另一种常见的产生发射谱线的可能性是通过自由电子和离子、

原子的碰撞激发来实现的，这将在下一章讨论.

为了计算复合辐射谱，首先应逐一考虑单个激发能级 n 的复合过程，求出一定动能 E_i 的自由电子落到该能级的复合截面 $\sigma_R(n)$.

§7.1 氢（及类氢）离子的复合截面

讨论氢离子和电子的复合特别重要. 因为一般等离子体，氢占总数 90%左右. 但本节的讨论也适用于各种类氢离子[这里指的是任何一种原子，当其轨道电子全部脱落，使其原子核 Ze 裸露的离子. 例如，二次电离的 He 原子 He^{++}，光谱学的常用记号是[He Ⅲ]. 当类氢离子俘获一个外来电子后，即构成一个类氢系统，其净电荷为$(Z-1)e$]. 以下求得的一般公式中，令 $Z=1$ 就可得到关于氢离子（质子）的有关公式.

这里并不按量子力学严格推求氢及类氢离子的复合截面 σ_R，只是采用一个简便的近似方法，但结果却是足够精确的.

显然，对于飞到离子近旁的自由电子，如果是发生了终态能量 $E_f\simeq 0$ 的韧致辐射，或者是发生了到高激发态的复合过程，即电离能 $I_{Z-1,n}\simeq 0$. 这两个过程在物理上看来是没有严格界限的，其特征都是电子最后在离子近旁缓慢的运动. 众所周知，在大的玻尔轨道上，电子做缓慢的低速运动. 由此可见，在 $E_f\to 0$ 极限下的韧致辐射截面应当和 $I_{Z-1,n}\to 0$ 极限下的复合辐射截面相等，而韧致辐射截面在第六章中已经给出. 这样至少可以得到 $I_{Z-1,n}\to 0$ 的极限情况下的（即到高激发态的）复合辐射截面公式. 然而可以证明，这样求得的复合截面公式对于到低激发态甚至到基态 $n=1$ 的复合过程也是很好的近似公式(Gould and Thakur, 1970, *Am. J. Phys.*, **38**, 189). 现在就来实现这个求复合截面的方案. 对于一个初速为 v_i 的自由电子，若发生韧致辐射后，终态 $E_f\simeq 0$，则相应于“高频”韧致辐射，截面应由(6.24)式给出，即

$$\sigma_B(\nu)\Delta\nu=\frac{16\pi}{3\sqrt{3}}\alpha_f^3K_e^{-2}\frac{Z^2}{\nu}\Delta\nu, \tag{7.2}$$

下标 B 代表韧致辐射，$\alpha_f=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137}$是精细结构常数，$K_e^{-1}=\frac{\hbar}{m_0 v_i}$代表入射电子德布罗意波长的$\frac{1}{2\pi}$倍.

另一方面，若该电子入射后，发生的是复合过程，落在主量子数为 n—$n+\Delta n$ 的态上，假定 n 取很大的值，相应于高激发态，则该能级电离能 $I_{Z-1,n}\simeq 0$，这是因为

$$I_{Z-1,n}=Z^2 I_{\mathrm{H}}/n^2 \tag{7.3}$$

的缘故. 式中 $I_H=13.6\mathrm{eV}$ 是氢原子的基态电离能. 这一复合过程伴随的辐射，其频率为

$$h\nu=E_i+I_{Z-1,n}.$$

因此，这一复合辐射的频率范围是

$$h\Delta\nu=\Delta I_{Z-1,n}=2Z^2 I_{\mathrm{H}}\left(\frac{\Delta n}{n^3}\right). \tag{7.4}$$

如果把电子俘获到 n—$n+\Delta n$ 这些高激发态的总复合截面记为 $\Delta\sigma_R$，则按上面的分析，应有

$$\Delta\sigma_R=\sigma_B(\nu)\Delta\nu. \tag{7.5}$$

把(7.2)式的 $\sigma_B(\nu)$ 和(7.4)式的 $\Delta\nu$ 值代入上式，就得到

$$\frac{\Delta\sigma_R}{\Delta n}\doteq\sigma_R(n)=\left(\frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\right)Z^2\alpha_f^3 K_e^{-2}\left(\frac{Z^2 I_{\mathrm{H}}}{h\nu}\right)\left(\frac{g_R(n)}{n^3}\right). \tag{7.6}$$

$\sigma_R(n)$就是所要求的到能级 n 的微分复合截面. 式中附上了一个修正因子 $g_R(n)$，称为复合冈特因子，$g_R(n)\simeq 1$，误差不超过10%. 如果令(7.6)式中 $Z=1$，就得到氢离子的复合截面.

由(7.6)式可见，入射电子动能越大，复合截面越小(见 K_e^{-1} 的定义)，而大的 Z 值与大的截面相应，这无疑与物理直观一致. 此外，n 值较小的低激发态的复合截面比高激发态(n 值大)来得大，即电子俘获到高激发态的概率很小. 这也符合物理直观；因为主量子数 n 越大，对应的束缚态电子轨道半径越大，致使离子与电子间库仑引力大为减弱，减小了对电子的束缚作用. 具体来讲，对于给定初动能 E_i 的入射电子，对于大的 n 值，复合截面正比于 n^{-3} [见(7.6)式]；但对于小的 n 值，如果这时入射电子动能 E_i 已远小

于该态的电离能，即 $E_t \ll \frac{Z^2 I_H}{n^2}$，则辐射光子的能量 $h\nu \simeq \frac{Z^2 I_H}{n^2}$，从而由(7.6)式可见，复合截面正比于 n^{-1}. 判断 n 值的大小，应当由等式

$$E_t \simeq \frac{Z^2 I_H}{n^2}$$

给出. 由此得到临界的 n 值为

$$n_{\max} \simeq \left(\frac{Z^2 I_H}{E_t}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{Z^2 I_H}{kT}\right)^{1/2}. \tag{7.7}$$

概括起来，截面和主量子数的粗略关系为

$$\sigma_R(n) \propto \begin{cases} n^{-1}, & \text{当 } n \leqslant n_{\max}; \\ n^{-3}, & \text{当 } n > n_{\max}. \end{cases} \tag{7.8}$$

其中 $n_{\max}$ 由(7.7)式给出.

(7.8)式表明，电子到低激发态的复合是更为重要的. 由(7.1)式可见，这种复合产生可见光(和紫外)辐射，这就解释了为什么复合辐射连续谱主要出现在光学波段(一般情况下，紫外光子可能被介质吸收，即下面将要说到的情况 B).

如果把 $\alpha_f \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$，$K_e^{-1} = \frac{\hbar}{m_0 v}$，$I_H = Rch$，及 $R = \frac{2\pi^2 m_0 e^4}{ch^3}$ 代入到截面公式(7.6)中，就得到另一个常用的表示式，

$$\sigma_R(n) = \frac{128\pi^4 e^{10} Z^4 g_R(n)}{3\sqrt{3}\, m_0 c^3 h^4 \nu n^3 v^2} \simeq 3 \times 10^{10} \frac{Z^4 g_R(n)}{\nu n^3 v^2} \quad (\text{cm}^2). \tag{7.9}$$

利用(7.9)式可以估算出，在温度为 5×10^3—20×10^3K 的常见范围内，$\sigma_R(n)$ 约为 $\sim10^{-20}\text{cm}^2$，远比氢原子的几何截面($\sim10^{-15}$ cm^2)小.

§7.2 氢(及类氢)离子的复合速率系数

利用复合截面公式(7.6)及(7.9)，可以求得氢(及类氢)离子的复合速率系数. 复合速率系数是确定一个处于电离-复合平衡的等离子体性质的重要参量. 先来介绍什么是复合速率系数. 设等离

子体内氢(或类氢)离子及自由电子的数密度分别用 N_Z,N_e 表示,由于复合作用,单位时间自由电子和离子数的减少率应与 N_e 及 N_Z 乘积成正比,即

$$-\frac{dN_e}{dt}=-\frac{dN_Z}{dt}=\alpha N_e N_Z,$$

比例系数 α 就是复合速率系数(用 cm^3/s 作单位).

对于氢(或类氢)离子,到主量子数为 n 的能级的复合截面由(7.6)式或(7.9)式给出,再假定自由电子气具有麦氏分布(这假定是合理的,理由是电子之间的库仑力是长程力,电子之间的碰撞截面远比等离子体中任何其它过程截面来得大.因此,电子之间的相互作用会很快建立电子气的平衡分布),即速率分布函数是

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left[-\frac{m_0v^2}{2kT}\right], \qquad (7.10)$$

其中 T 是电子温度.因此,总的复合速率系数应当是

$$\alpha(T)=\sum_n\int_0^\infty\sigma_R(n)vf(v)dv=\sum_n\alpha_n(T), \qquad (7.11)$$

其中 $\alpha_n(T)$ 表示到能级 n 的复合速率系数.

把(7.9)式和(7.10)式代入上式,注意到(7.1)式,就可算出总的以及到单个能级 n 的复合速率系数 $\alpha(T)$ 及 $\alpha_n(T)$ 了.例如,对于复合到氢($Z=1$)的第 n 个能级的复合速率系数是

$$\alpha_n(T)=\frac{2^9\pi^5}{(6\pi)^{3/2}}\frac{e^{10}}{m_0^2c^3h^3}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^{3/2}\frac{1}{n^3}\exp\left(\frac{\chi_n}{kT}\right)K\left(\frac{\chi_n}{kT}\right), \qquad (7.12)$$

其中 $\chi_n=\frac{I_H}{n^2}$ 是氢原子第 n 个激发能级的电离电势.$K(t)$ 是指数积分,

$$K(t)=\int_t^\infty\frac{1}{x}e^{-x}dx=\int_1^\infty\frac{1}{\xi}e^{-t\xi}d\xi.$$

将(7.12)对所有 n 求和,就可得到总的复合速率系数.

就本书涉及的辐射机制问题而言,对总的复合速率系数没有很直接的兴趣,这里不再作详细的讨论,仅列出已知的结果.按照

(7.11)式，对电子速度的麦氏分布求平均及对所有 n 求和，得到总的复合系数为①

$$\alpha(T) = 2A\left(\frac{2kT}{\pi m_0}\right)^{1/2} Y\varphi(Y)\,\bar{g}_R$$

$$= 2\times 10^{-11} Z^2 T^{-\frac{1}{2}}\varphi(Y) \quad (\mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}). \qquad (7.13)$$

其中

$$A = \left(\frac{32\pi}{3^{3/2}}\right)\alpha_f^{-1} a_0^2 = 2\times 10^{-22}\mathrm{cm}^2,$$

a_0 是氢原子玻尔半径，$Y=\dfrac{Z^2 I_{\mathrm{H}}}{kT}$，即 Y 表示类氢原子电离能与电子平均动能比，它是决定 $\alpha(T)$ 性质的一个重要参量. $\bar{g}_R$ 表示平均复合冈特因子，$\bar{g}_R\simeq 0.9$，误差不超过 10%(Gould and Thakur, 1970, *Am. J. Phys.*, **38**, 189).

对于"低温"情况(这里指的"低温"是满足条件 $Y\gtrsim 1$，即 $kT\lesssim Z^2 I_{\mathrm{H}}$)，

$$\varphi(Y) = \frac{1}{2}(1.735 + \ln Y + (6Y)^{-1}), \qquad Y\gtrsim 1 \quad (7.14)$$

(参见前面引的 Burbidge 等人的文献，1963).

由(7.14)式可见，在很"低"的温度下，$Y\gg 1$，即平均电子动能 $\overline{E}_i\simeq kT\ll Z^2 I_{\mathrm{H}}$(例如，在 $T=10^4$K 下，$kT\simeq 1$eV，远小于氢原子电离能 13.6eV)，得到

$$\varphi(Y)\simeq\frac{1}{2}\ln Y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{Z^2 I_{\mathrm{H}}}{kT}\right). \qquad (7.15)$$

故由(7.13)式，复合系数 $\alpha(T)$ 与温度 T 的依赖关系可写成

$$\alpha(t)\propto Z^2 T^{-\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{Z^2 I_{\mathrm{H}}}{kT}\right). \qquad (7.16)$$

粗略地讲，"低温"下有 $\alpha(T)\propto T^{-\frac{1}{2}}$ 关系. 这关系也可从简单的定性分析中看出. 当 $E_i\simeq kT\ll Z^2 I_{\mathrm{H}}$，则复合到低激发态[即 $n<n_{\max}$ 的

① 参见 Spitzer, *Ap. J.*, **107**(1948), 6, 及 Burbidge Gould and Pottasch, 1963, *Ap. J.*, **138**, 945.

各能态，正如(7.8)式后面指出的，这些能级对复合起主要作用]时所产生的光子

$$h\nu = E_i + \frac{Z^2 I_H}{n^2} \simeq \frac{Z^2 I_H}{n^2},$$

与速度 v_i 无关. 因而由(7.6)式可见，截面 $\sigma_R(n)$ 和入射电子速度 v 之间关系变得很简单，成为平方反比关系，$\sigma_R(n) \propto v^{-2}$(见 K_e^{-1} 的定义). 而由(7.10)式可见，分布函数 $f(v) \propto T^{-\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$，故由(7.11)式求出的复合系数 $\alpha(T) \propto T^{-\frac{1}{2}}$，说明温度升高时，复合速率将下降.

需要指出，尽管(7.14)式是在较"低"温度下(即 $Y \gtrsim 1$)导出的，但是当 Y 值甚至低到～0.5 时，该式仍为很好的近似，误差不超过1%.

对于小的 Y 值(或者说在高的温度下)，容易证明(7.13)式中的 $\varphi(Y)$ 将是 Y 的幂级数，其首项是(参见 Tucker and Gould，*Ap. J.*，**144**(1966)，244)

$$\varphi(Y) \simeq Y(-1.202\ln Y - 0.298), \quad Y \ll 1. \tag{7.17}$$

因此，高温下($kT \gg Z^2 I_H$，即 $Y \ll 1$)有

$$\alpha(T) \propto Z^4 T^{-\frac{3}{2}} \ln\left(\frac{kT}{Z^2 I_H}\right) \propto T^{-3/2}, \tag{7.18}$$

即在高温下，复合迅速减少.

在许多饶有兴趣的情况下，紫外光子的吸收平均自由程比起介质的线度要小. 例如，电子到基态的复合产生紫外光子(莱曼光子)，由于其能量 $h\nu$ 大于原子电离能，故很容易在传播中被其它原子吸收，并产生光致电离. 在文献中，介质对紫外光子不透明情况常称为情况 B(否则称为情况 A). 在情况 B 下，到基态的紫外复合对于等离子体的电离-复合平衡实际不起作用，应该在讨论复合速率问题时不予考虑. 总复合速率系数 $\alpha(T)$ 应该只是对各激发态 n 的求和. 所得结果和(7.13)式是类似的，只是式中的 φ 应代以 $\phi = \varphi - \varphi_1$，$\varphi_1(Y)$ 代表到基态的复合对 φ 的贡献，$\varphi_1(Y)$ 的形式是[请比较(7.12)式和(7.13)式，并令(7.12)式中 $n=1$].

$$\varphi_1(Y) = Ye^Y K(Y) \longrightarrow \begin{cases} 1 - Y^{-1} - 2Y^{-2}, & \text{大的 } Y \text{ 值;} \\ Y(-\ln Y - 0.577), & \text{小的 } Y \text{ 值.} \end{cases} \tag{7.19}$$

其中 $K(Y)$ 就是(7.12)式所说的指数积分.

§7.3 复合辐射连续谱

假定电子速度具有麦氏分布(7.10)式,则由于电子被类氢离子俘获到净电荷为$(Z-1)e$ 的离子的第 n 个能级上,单位体积气体所产生的频率为 ν—$\nu+d\nu$ 的辐射功率(谱发射系数)为

$$j_R(n,\nu)d\nu = N_Z h\nu\sigma_R(n)N_e f(v)vdv.$$

代入(7.9)及(7.10)式,并注意到

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = h\nu - I_{Z-1,n},$$

就得到

$$j_R(n,\nu) = 1.8 \times 10^{-32}T^{-\frac{3}{2}}n^{-3}N_eN_ZZ^4 \cdot \exp\left[\frac{I_{Z-1,n} - h\nu}{kT}\right] \quad (\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Hz}^{-1}) \tag{7.20}$$

(7.20)式只考虑了到激发能级 n 的复合,这种复合产生的连续谱形与频率 ν 的关系具有指数衰减形式,并且在 $\nu_0=\frac{I_{Z-1,n}}{h}$ 处有一明确的边界. 若要求得最后的复合辐射连续谱,应当计及到各个能级 n 的复合的贡献,因此得到

$$\begin{aligned} j_R(\nu)d\nu &= \sum_{n=n_0}^{\infty} j_R(n,\nu)d\nu \\ &= 1.8 \times 10^{-32}T^{-\frac{3}{2}}N_eN_ZZ^4e^{-\frac{h\nu}{kT}} \\ &\quad \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^3}\exp\left[\frac{Z^2I_H}{kTn^2}\right]d\nu, \end{aligned} \tag{7.21}$$

$j_R(\nu)$ 单位和(7.20)式相同. 注意,求和并不是对所有量子数 n 作的,而是只对满足条件

$$I_{Z-1,n} \leqslant h\nu$$

的能级 n 求和，$n \geqslant n_0$. 由 $I_{Z,\ ,n}=\frac{Z^2 I_H}{n^2}$ 可定出最低复合能级的主量子数 n_0，

$$n_0 = \left(\frac{Z^2 I_H}{h\nu}\right)^{1/2} \tag{7.22}$$

只有到这些能级的复合才有可能产生给定频率 ν 的辐射.

如果需要复合辐射谱发射系数的具体数值，就必须算出(7.21)式中的幂级数. 可以利用一个很好的近似公式完成这一求和(感兴趣的读者请参见 Brussard and Van De Hulst，*Rev. Mod. Phys.*，**34**(3)，507，1962).

最后指出，(7.21)式只是类氢离子的复合谱，实际上，宇宙等离子体总含有少量其它元素的离子. 如 He^+，O^+，O^{++}，N^+等. 更严格地计算复合连续谱，应当考虑这些少量离子的作用. 可以用以下简单的近似方法引进非类氢的复杂离子对复合谱的贡献. 把复杂的非类氢离子主量子数为 n 的激发态的电离能记为 $I_{Z,z,n}$. 这里 Z 是核电荷数，即原子序数，标明了离子品种，而 z 是离子的净电荷(例如对 O^{++}离子，$z=2$). 当一个净电荷为 ze 的复杂离子和一个电子复合，进入能态 n 时，我们可以近似地认为，这个新形成的、净电荷为$(z-1)e$ 的离子在能级 n 的电离能为

$$I_{Z,z-1,n} \simeq \frac{z^2 I_H}{n^2} \tag{7.23}$$

理由是：被俘获的电子总是在最外层的大轨道上，可以看作是在一个净电荷为 z 的离子实外面的轨道运动. 因此，有理由近似地认为，这个电子与离子实共同构成一个类氢的系统. 从而写下(7.23)式. 既然把入射电子和离子实看成了类氢离子，因此到激发态 n 的复合截面就可以近似地用类氢离子的公式(7.6)或(7.9)了. 不过还需要作如下附加的近似修正：已经知道，能级 n 有 $2n^2$ 个能态；假如离子中原有的电子已经把这 $2n^2$ 个态填满，构成满壳层，则由于不相容原理，外来的入射电子无论如何无法复合到能级 n 上来，即此时复合截面应为零. 反之，若离子的 $2n^2$ 个态全是空的，没有电子，则有理由直接采用(7.6)或(7.9)式计算截面 $\sigma_R(n)$. 对于中

间情况，离子的 $2n^2$ 个态上只被部分填充，例如填有 r 个电子($r<2n^2$)，则只剩下 $\overline{S}=2n^2-r$ 个态是空的，$\frac{\overline{S}}{2n^2}$就表示壳层 n 的未填满百分数，这时外来电子到能级 n 的有效复合截面 $\sigma_R^{\text{eff}}(n)$ 可以近似地等于

$$\sigma_R^{\text{eff}}(n) = \frac{\overline{S}}{2n^2}\sigma_R(n) \tag{7.24}$$

举例说，在一个类锂离子(任何一种原子核，只要其周围只有三个轨道电子，组态与锂原子相似，就称为类锂的)接收一个外来电子，构成一个类铍离子的过程中，由于类锂离子主量子数为 $n=2$ 的壳层上原只有一个电子，还有 $2n^2-1=7$ 个状态是空的，故该壳层的未填满百分数是$\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$.

作了这两步近似以后，电子复合到复杂离子的第 n 个能级产生的复合谱，就可以近似得到. 这只需要把(7.20)式乘以未填满百分数$\frac{\overline{S}}{2n^2}$，再将(7.20)式的指数中的 $I_{Z-1,n}$用(7.23)式中的 $I_{Z,z-1,n}$ 置换即可，所以得到

$$j_R^{Z,z}(n,\nu)d\nu = 1.8\times10^{-32}T^{-\frac{3}{2}}N_eN_{Z,z}e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot z^4\frac{\overline{S}}{2n^2}n^{-3}\exp\frac{I_{Z,z-1,n}}{kT}. \tag{7.25}$$

$j_R^{Z,z}$ 的单位仍为 erg/(cm^3 · s · Hz)，或者利用(7.23)式将上式改写为

$$j_R^{Z,z}(n,\nu)d\nu = 1.8\times10^{-32}T^{-\frac{3}{2}}N_eN_{Z,z}e^{\frac{-h\nu}{kT}}\left(\frac{\overline{S}}{2n^2}\right) \cdot n\left(\frac{I_{Z,z-1,n}}{I_H}\right)^2\exp\left(\frac{I_{Z,z-1,n}}{kT}\right). \tag{7.26}$$

对于由各种原子序数 Z、各种电离级次 z 的离子组成的混合等离子体，考虑了到各种能级 n 的复合后，总的复合辐射连续谱应当由(7.26)式对各种 Z,z 及 n 值求和.

$$j_R(\nu)d\nu = \sum_{Z,z,n} j_R^{Z,z}(n,\nu)d\nu$$

$$= 1.8 \times 10^{-32} N_e N_{\mathrm{H}^+} T^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{h\nu}{kT}} X, \qquad (7.27)$$

其中

$$X = \sum_{Z,z,n} \left(\frac{N_{Z,z}}{N_Z} \right) \left(\frac{N_Z}{N_{\mathrm{H}^+}} \right) \left(\frac{\overline{S}}{2n^2} \right) \cdot n \left(\frac{I_{Z,z-1,n}}{I_{\mathrm{H}}} \right)^2 \exp\left[\frac{I_{Z,z-1,n}}{kT} \right].$$

$N_{Z,z}$是原子序数为 Z、净电荷为 ze 的离子数密度. 求和是对满足条件 $I_{Z,z-1,n} \leqslant h\nu$ 的所有能级 n 进行. 实际上，由于等离子体中离子的品种很有限，数量又很少，上述求和只有很有限的几项. 在只有类氢离子的情况下，X 还原为

$$X = \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-3} Z^4 \exp\left[\frac{Z^2 I_{\mathrm{H}}}{n^2 kT} \right],$$

所以(7.27)回到(7.21)式.

最后，把复合辐射连续谱和轫致谱作一个比较. (6.43)式是轫致辐射的谱发射系数，比较(7.21)式与(6.43)式，得到在任一给定频率 ν 处，

$$\frac{j_R(\nu)}{j_B(\nu)} \simeq 10^{-1} X / T_6, \qquad (7.28)$$

其中 T_6 是以 10^6K 为单位的温度值. 根据(7.28)式，对于给定的温度 T_6，由于 X 值随频率 ν 值的增大而增加[注意，最低量子数 n_0 随频率加大而减小，见(7.22)式]，复合辐射连续谱在高频端有可能超过轫致辐射 j_B，而在低频端则后者占优势. 具体地说，当波长小于$\sim \frac{30}{T_6}$ Å 时，复合辐射超过轫致辐射；而当波长大于$\frac{30}{T_6}$ Å 时，轫致辐射大于复合辐射. 对于任意给定频率、当温度升高，则此值 $j_R(\nu)/J_B(\nu)$ 减少. 在温度超过 10^7K，则除去在边界频率 $h\nu = I_{Z,z-1,n}$处之外，复合辐射在所有波长上都成为不重要的.

§7.4 复合线·巴尔末减缩

复合辐射不仅能产生连续谱，也可以在复合到激发态后随即发生的向低能级的级联跃迁过程中产生发射谱线，称为复合线. 其

中向 $n=2$ 能级发生的级联跃迁过程产生氢的巴尔末线系. 本节着重讨论巴尔末复合线,原因是巴尔末线在天体物理中有很大重要性. 对于一个温度在 10^3—10^5K 范围的低密度等离子体,H_α 及 H_β 线是光学谱中的两条重要特征线. 现在就根据复合-级联过程的考虑,从理论上定出巴尔末线系的各谱线的相对强度,即巴尔末缩减,并和观测结果作一比较.

由于频率为 ν_{mn} 的谱线的发射系数为

$$j_{\nu_{mn}} = N_m A_{mn} h\nu_{mn},$$

其中 N_m 是激发能级 m 上的原子数密度,A_{mn} 是 $m\to n$ 的跃迁的概率,所以只要知道 A_{mn} 和各激发态原子数,就可定出每条谱线的发射系数及各条谱线的相对强度. 但请注意,对于一个密度很低的稀薄等离子体,辐射跃迁概率远远超过碰撞跃迁. 这种系统是偏离局部热平衡状态的,不能直接用局部热平衡下的玻耳兹曼-沙哈公式来计算各个激发态 n 上的原子数 N_n. 为求 N_n,就必须解一组复合-级联方程. 这组方程可以这样得到:在稳定条件下,各能级 n 上的原子数密度 N_n 不随时间变化,因此进入能级 n 的原子数应当和离开的相等. 进入能级 n 的途径有三条:1. 自由电子直接复合到能级 n,复合次数是 $\alpha_n(T)N_eN(\mathrm{H}^+)$;2. 从高激发态到能级 n 的自发跃迁,次数是 $\sum_{k=n+1}^{\infty} N_k A_{kn}$;3. 当吸收频率为 ν_{1n} 的莱曼光子 $h\nu_{1n}$,从基态跃迁到 n 态,次数是 $N_1B_{1n}I(\nu_{1n})$. 于是单位时间单位体积内跃迁到能级 n 的总数是

$$N_eN(\mathrm{H}^+)\alpha_n(T) + \sum_{k=n+1}^{\infty} N_k A_{kn} + N_1 B_{1n} I(\nu_{1n}).$$

另一方面,对于一个低密度及辐射场不太强的等离子体,可以忽略碰撞引起的跃迁以及感应辐射跃迁,从而原子只能通过向低能级的自发跃迁离开能级 n. 单位时间单位体积内离开的原子数是

$$N_n \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk},$$

使以上两式相等，得到

$$N_n \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} = N_e N(\mathrm{H}^+)\alpha_n(T) + \sum_{k=n+1}^{\infty} N_k A_{kn} + N_1 B_{1n} I(\nu_{1n}) \qquad (7.29)$$

$$(n = 2, 3, 4, \cdots).$$

这就是用来确定各能级原子数 N_n 的复合-级联方程. 它是关于 $N_1, N_2, N_3 \cdots N_n \cdots$ 的线性方程组. 其中复合系数 $\alpha_n(T)$ 由(7.12)式给出，

$$\alpha_n(T) \simeq 3.26 \times 10^{-6} T^{-\frac{3}{2}} n^{-3} \exp\left(\frac{\chi_n}{kT}\right) K\left(\frac{\chi_n}{kT}\right),$$

其中 $\chi_n = \frac{I_{\mathrm{H}}}{n^2} = \frac{Rhc}{n^2}$. 为了方便，Bates 等人(1960 年)算出了从 $n=1$ 到 $n=12$，$T=250\mathrm{K}$ 到 $T=6.4\times10^4\mathrm{K}$ 的部分复合速率系数值，列于表 7.1 中.

(7.29)式中的自发跃迁系数 A_{kn}，A_{nk} 也是可从理论上计算的. 已知氢原子在能级 k 和 n 之间的振子强度为

$$\overline{f}_{kn} = \left(\frac{64}{3\sqrt{3}\,\pi}\right) \frac{1}{g_k} \left[\frac{k^3 n^3}{(n^2 - k^2)^3}\right] g_{nk},$$

式中 g_k 是能级 k 的权重，$g_k = 2k^2$，$g_{nk} \simeq 1$. 而自发发射系数 A_{nk} 和振子强度 $\overline{f}_{kn}$ 的关系则为[见(2.46)式]

$$A_{nk} = \frac{g_k}{g_n} \frac{8\pi^2 e^2 \nu_{nk}^2}{m_0 c^3} \overline{f}_{kn} \qquad (n > k),$$

故由 $\overline{f}_{kn}$ 值即可求出 A_{nk}.

剩下的麻烦就是定(7.29)式中的感应跃迁系数 B_{1n} 和辐射场强度 $I(\nu_{1n})$ 了. 但是从实际的物理情况出发，可以免去这一困难. 为此，通常分两种情况分别讨论：

1. 情况 A. 等离子体很稀薄，对于所有频率的辐射都是光学薄的. 这时(7.29)式中的感应吸收项 $N_1 B_{1n} I(\nu_{1n})$ 可以略去.

表 7.1 氢离子的复合速率系数 $\alpha_n(T)$（单位为 cm^3/s）*

主量子数 \ 温度 (K)	250	500	1,000	2,000	4,000	8,000	16,000	32,000	64,000
1	1.02^{-12}	7.17^{-13}	5.07^{-13}	3.56^{-13}	2.50^{-13}	1.74^{-13}	1.20^{-13}	8.02^{-14}	5.19^{-14}
2	5.66^{-13}	3.98^{-13}	2.79^{-13}	1.94^{-13}	1.32^{-13}	8.80^{-14}	5.63^{-14}	3.42^{14}	1.95^{-11}
3	3.90^{-13}	2.72^{-13}	1.88^{-13}	1.28^{-13}	8.44^{-14}	5.33^{-14}	3.19^{-14}	1.80^{-14}	9.46^{-15}
4	2.95^{-13}	2.04^{-13}	1.40^{-13}	9.23^{-14}	5.86^{-14}	3.53^{-14}	2.00^{-14}	1.06^{-14}	5.33^{-15}
5	2.36^{-13}	1.62^{-13}	1.08^{-13}	6.99^{-11}	4.29^{-14}	2.48^{-14}	1.35^{-14}	6.87^{-15}	3.32^{15}
6	1.96^{-13}	1.33^{-13}	8.70^{-14}	5.48^{-14}	3.26^{-14}	1.82^{-14}	9.53^{-15}	4.71^{-15}	2.22^{-15}
7	1.66^{-13}	1.11^{-13}	7.16^{-14}	4.39^{-14}	2.54^{-14}	1.38^{-14}	7.02^{-15}	3.39^{-15}	1.56^{-15}
8	1.43^{-13}	9.46^{-14}	5.99^{-14}	3.59^{-14}	2.02^{-14}	1.07^{-14}	5.34^{-15}	2.53^{-15}	1.14^{-15}
9	1.25^{-13}	8.17^{-14}	5.08^{-14}	2.98^{-14}	1.64^{-14}	8.51^{-15}	4.16^{-15}	1.93^{-15}	8.66^{-16}
10	1.11^{-13}	7.13^{-14}	4.36^{-14}	2.51^{-14}	1.35^{-14}	6.88^{-15}	3.31^{-15}	1.52^{-15}	6.72^{-16}
11	9.88^{-14}	6.27^{-14}	3.77^{-14}	2.13^{-14}	1.13^{-14}	5.65^{-15}	2.68^{-15}	1.22^{-15}	5.33^{-16}
12	8.87^{-14}	5.56^{-14}	3.29^{-14}	1.83^{-14}	9.53^{-15}	4.71^{-15}	2.21^{-15}	9.86^{-16}	4.30^{-16}

* 表中指数表示 10 的幂次；例如，$1.02^{-12} = 1.02 \times 10^{-12}$。

2. 情况 B. 等离子体对于莱曼光是光学厚的，但对其它波长辐射仍是透明的. 这显然也是符合实际的一种情况. 因为不太高的温度下，原子绝大多数处于基态($n=1$)，因而只可能吸收紫外的莱曼光子而产生激发或光电离. 但对可见光或红外光则几乎不吸收.

在第 2 种情况，等离子体在莱曼线内辐射的量子很快就在介质中被吸收(光学厚). 我们假定光深足够大，使 $1\to n$ 的吸收跃迁数和 $n\to 1$ 的跃迁数相等，即

$$N_n A_{n1} = N_1 B_{1n} I(\nu_{1n}).$$

因此，复合级联方程组(7.29)在第 2 种情况下化为

$$N_n \sum_{k=2}^{n-1} A_{nk} = N_e N(\mathrm{H}^+)\alpha_n(T) + \sum_{k=n+1}^{\infty} N_k A_{kn}.$$

这样，在这两种情况中，方程(7.29)就都不含 $N_1 B_{1n} I(\nu_{1n})$ 项了.

但求解(7.29)式的方法还可以进一步简化. 按照沙哈公式，对处于热平衡的氢原子气体，能级 n 上的原子数密度 N_n 为

$$N_n = N(\mathrm{H}^+) N_e \frac{h^3}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \frac{g_n}{2} \exp\left[\frac{I_{\mathrm{H}}}{n^2 kT}\right],$$

式中 N_e 是电子密度，$N(\mathrm{H}^+)$ 是基态氢离子密度，$g_n = 2n^2$ 是能级 n 的简并度，而 $\frac{I_{\mathrm{H}}}{n^2} = I_n$ 是能级 n 的电离能.

导出沙哈公式并不困难. 已经知道，按玻耳兹曼分布，热平衡时处于能级 n 与能级 n' 的粒子数比为

$$\frac{N_{n'}}{N_n} = \frac{g_{n'}}{g_n} \exp\left[-\frac{E_{n'n}}{kT}\right],$$

式中 $E_{n'n} = E_{n'} - E_n$ 是两能级差. 与上式类似，可以写出能级 n 粒子数与电离基态粒子数之比

$$\frac{N(\mathrm{H}^+) dN_e}{N_n} = \frac{g_+ dg_e}{g_n} \exp[-(E + I_n)/kT],$$

式中 g_+ 是电离基态的简并度，$g_+ = 1$，dg_e 是单位体积中能量在 E—$E+dE$ 的电子态的简并度，

$$dg_e = 2\frac{d^3 p}{h^3}$$

因子 2 是来自电子自旋两取向. 而 $d^3p=4\pi p^2dp=4\pi m^2vdE$(因 $E=\frac{1}{2}mv^2$).
上式左端 dN_e 为

$$dN_e = N_e f(E,T)dE,$$

$f(E,T)$为自由电子麦氏分布函数,

$$f(E,T) = 4\pi m^2(2\pi mkT)^{-3/2}v\exp\left[-\frac{E}{kT}\right].$$

由这些关系即可得沙哈公式(取 $g_+=1$).

回到(7.29)式求解 N_n 的任务上来,简化办法是:不直接求解 $N_n(n=2,3,4,\cdots)$,而是利用沙哈公式,首先将各能级 n 上的原子数密度 N_n 写成

$$N_n = b_nN(\mathrm{H}^+)N_e\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\frac{g_n}{2}e^{\frac{I_\mathrm{H}}{n^2kT}}. \qquad (7.30)$$

其中 e 的指数为$\frac{I_\mathrm{H}}{n^2kT}=\frac{Rhc}{n^2kT}=\frac{158,000}{n^2T}$,而 b_n 是表示对温度为 T 的热平衡分布(沙哈公式)偏离程度的一个修正因子. 把 N_n 写成(7.30)式,相当于认为粒子分布并不是远离热平衡分布(的确,一般 b_n 值不会很多地偏离 1). 把(7.30)式代入(7.29)式,即得关于 $b_n(n=2,3,4,\cdots)$的方程组了. 求出 b_n,也就由(7.30)式定出 N_n. 这样简化后,作为参数的密度值 N_e,$N(\mathrm{H}^+)$就不再在方程中出现. 另一个显而易见的好处是,当 $n\to\infty$时,$b_n\to1$,即高激发态 n 上的分布近似是热平衡分布(由于高激发态的辐射跃迁概率小,寿命长,从而碰撞过程将超过辐射跃迁,使热平衡分布得以建立,详见第八章的分析). 这无疑有利于从(7.29)式中解出各 b_n 值. 因为待定的未知数 $b_2,b_3,b_4\cdots$只有少数几个,对大的 n 值,可令 $b_n=1$. 详细的求解技巧请参见(Menzel and Baker,1937,*Ap. J.*,**86**,70).

利用上述方法,对于给定的参数 T,N_e 及 $N(\mathrm{H}^+)$,可以求得 $n\geqslant3$ 的各能级上的氢原子数 N_n,再利用

$$j_{n2} = N_nA_{n2}h\nu_{n2},$$

即可求出各条巴尔末谱线的线强. 较新的计算值列于表 7.2 中. 表 7.2 列出各巴尔末线对于 H_β 线的相对强度值,即

$$J_n = j_{n2}/j_{42},$$

相应的观测值列在最后一列，可见两者符合甚佳.

表7.2 巴尔末减缩

相对强度的计算值J_n					观测值（对六个行星状星云取平均的结果，已作了红化修正）
	情况 A		情况 B		
n	10,000K	20,000K	10,000K	20,000K	
3	2.48	2.36	2.62	2.53	2.55
4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
5	0.501	0.510	0.489	0.493	0.56
6	0.288	0.296	0.276	0.280	0.29
7	0.181	0.188	0.172	0.174	—
8	0.122	0.128	0.114	0.117	—

为了求出绝对谱线强度，需要按公式

$$j_{\nu_{mn}} = N_m A_{mn} h\nu_{mn},$$

求出每条谱线的发射系数. 能级 m 上的原子数密度 N_m 由(7.30)式给出：

$$N_m = b_m N(\mathrm{H}^+) N_e \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \frac{g_m}{2} e^{\chi_m},$$

其中表示对于局部热平衡分布偏离程度的因子 b_m 将由复合级联方程(7.29)解出.

对于巴尔末线系的第二条谱线 H_β 而言，谱线发射系数是

$$j(\mathrm{H}_\beta) = j_{42} = b_4 N_e N(\mathrm{H}^+) 4^2 A_{42} h\nu_{42} \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(\frac{h\nu_{4\infty}}{kT}\right).$$

如果 $T=10^4$K，并且属于第二种情况（对莱曼线辐射，等离子体是光学厚的），可以求出 $b_4 \simeq 0.2$. 将此 b_4 值代入上式，并采用近似表示，则得到

$$j(\mathrm{H}_\beta) \simeq 2.8 \times 10^{-22} N_e N(\mathrm{H}^+) T^{-0.84} \quad (\mathrm{erg \cdot s^{-1} \cdot cm^{-3}}).$$

§7.5 射电复合谱线

对于复合到激发态的电子，如果通过级联跃迁到达其它能级 n，就相应产生其它线系. 实际上，目前天文观测已检验到帕邢系和其它更低频的线系，只不过其重要性不如巴尔末系而已. 除去巴尔末系之外，就天体物理学的应用而言，在高激发态之间的复合-级联跃迁产生的射电复合线也是很重要的. 通过对它们的研究，可以对等离子体内部物理条件如电子温度等有进一步了解.

射电发射线的频率为

$$\nu = cRz^2(n_1^{-2} - n_2^{-2}), \tag{7.31}$$

其中 R 是里德伯常量($cRh = I_H$)，z 是相对于处在高激发态的电子而言(有大的轨道)的离子所具有的净电荷数. 这里同样是把大轨道上的激发态电子和离子实近似地看成一个类氢的系统，从而写下了(7.31)式.

考虑到电子折合质量略低于其静止质量，就使得里德伯常量会随不同的原子而略有差异，即

$$R = \left(\frac{2\pi^2 m_e e^4}{ch^3}\right) \Big/ \left(1 + \frac{m_e}{Am_p}\right). \tag{7.32}$$

这里 A 是原子量，m_e 是电子质量，m_p 是质子质量. 里德伯常量随原子量的变化在表 7.3 中列出.

表 7.3

元素	原子量	$R(A)(\mathrm{cm}^{-1})$
H^1	1.007	109678
H^2	2.00	109707
He	4.00	109722
C	12.00	109733
O	16.00	109733

如果是相邻两个高激发态的跃迁，即 $n_2 = n_1 + 1$，$\Delta n = 1$，则习惯上这一跃迁称为 n_α 跃迁，n 取低能级 n_1 的值. 当 $n_2 = n_1 + 2$，即

$\Delta n=2$，这一跃迁称为 n_β 跃迁，等等. 相应的谱线称为 n_α 线，n_β 线等等. 为了还能够表示出是哪个元素原子的复合线，就在谱线记号前标上元素的符号，例如 $\mathrm{H}n_\alpha$，$\mathrm{He}n_\gamma$ 等.

由于 n_1, n_2 都取大的值，Δn 通常又比较小，所以辐射频率(7.31)式可以很精确地用以下近似代替：

$$\nu \simeq 2cRz^2 \frac{(n_2 - n_1)}{n_1^3}. \tag{7.33}$$

从(7.33)能够看出一个有趣的事实，即当电子被任何一种 $z=1$ 的一次电离元素原子(O^+，C^+，$He^+\cdots$)俘获，而且是复合到高激发态($n\gg1$)情况下，只要 n_1 值相同，$\Delta n=n_2-n_1$ 也一样，则各种不同元素原子的跃迁频率都很相近；仅仅由于不同原子 R 值略有不同，使得比氢重的元素原子的发射线比氢原子的相应发射线略微移向高频端，但不要误认为这是同一条谱线的多普勒移动. 频率相近的物理原因是显然的.

若要求得谱线的辐射强度，应当从辐射转移方程(3.15)出发. 注意现在线心处的强度实际上是由两部分组成的，即等于谱线的强度与连续谱在该频率处的强度之和：

$$I_\nu = I_{L\nu} + I_{c\nu}. \tag{7.34}$$

因此，在写辐射转移方程时，既要线心处的谱线吸收系数 k_L 和发射系数 j_L，也要考虑连续谱的 k_c 和 j_c. 在线心处有

$$\frac{dI_\nu}{dx} = -k_L I_\nu - k_c I_\nu + j_L + j_c. \tag{7.35}$$

而在谱线附近的连续区中，实际上已有 $k_L=0$ 及 $j_L=0$，故在紧邻的连续区有

$$\frac{dI_\nu}{dx} = -k_c I_\nu + j_c. \tag{7.36}$$

假定等离子体均匀，温度、密度处处相同，则解(7.35)式得到线心处的强度为

$$I_\nu = \left(\frac{j_\nu}{k_\nu}\right)\left(1 - e^{-\tau(\nu)}\right), \tag{7.37}$$

式中

$$j_\nu = j_L + j_c, k_\nu = k_L + k_c, \tau(\nu) = \int_0^L (k_L + k_c) dx.$$

同样，解(7.36)式，得到紧邻谱线的连续谱区的强度为

$$I_c = \left(\frac{j_c}{k_c}\right)(1 - e^{-\tau_c(\nu)}). \tag{7.38}$$

由于 $I_\nu = I_c + I_L$，故线强度与连续谱强度在同一频率之比为

$$\frac{I_L}{I_c} = \left(\frac{I}{I_c}\right) - 1 = \frac{(j_\nu/k_\nu)(1 - e^{-\tau(\nu)})}{(j_c/k_c)(1 - e^{-\tau_c(\nu)})} - 1.$$

由于高激发态寿命很长，对于一般等离子体来说，这一寿命远大于碰撞时间，因此即使对低密度等离子体，碰撞跃迁也成为主要过程. 这种情况使我们可以应用局部热平衡假定(见第八章)，这时基尔霍夫定律成立，故

$$j_\nu/k_\nu = j_c/k_c = B(\nu),$$

从而

$$\frac{I_L}{I_c} = \frac{1 - e^{-\tau(\nu)}}{1 - e^{-\tau_c(\nu)}} - 1. \tag{7.39}$$

对于光学厚的情况，$\tau(\nu)$ 和 $\tau_c(\nu) \gg 1$，从而 $I_L/I_c = 0$，即不会有发射线出现. 可是在光学薄情况下，

$$\frac{I_L}{I_c} \simeq \frac{\tau(\nu)}{\tau_c(\nu)} - 1 = \frac{\tau_L(\nu)}{\tau_c(\nu)}. \tag{7.40}$$

上式中，强度比可从观测中得到，而右边的光深 τ_L 和 τ_c 可以从理论上算出，它们与等离子体中的电子密度及温度有关，从而利用(7.40)式可以推求等离子体内部的物理条件. 不过在射电天文学中，实际是用"亮温度"T^B(见第二章)概念代替强度，好在两者之间有简单的关系[见(2.15)式]：

$$T^B = I_\nu \cdot \frac{c^2}{2k\nu^2}.$$

因此，(7.40)式可改写为

$$T_L^B/T_c^B = \frac{\tau_L(\nu)}{\tau_c(\nu)} = \frac{k_L}{k_c}. \tag{7.41}$$

最后一步等式是由于假定了等离子体均匀，因此 $\tau_L = k_L \cdot L, \tau_c =$

$k_c \cdot L$.

k_c 是容易得到的；因为已经指出，在射电波段，连续谱的辐射基本上来自轫致辐射，其谱发射系数 j_c 已由(6.43)式给出，所以只要利用基尔霍夫定律

$$j_c/k_c = B(\nu) = \frac{2kT\nu^2}{c^2},$$

即可求得 k_c. (6.49)式即用此法导出 k_c 值.

$$k_c = 0.018T^{-1.5}\nu^{-2}N_eN(\mathrm{H}^+ + \mathrm{He}^+)\overline{g}_{ff}(\nu,T).$$

对于 $h\nu \ll kT$ 的低频情况，采用第六章表 6.3 中的平均冈特因子值(第一行)，则有

$$k_c = 0.01T^{-1.5}\nu^{-2}N_eN(\mathrm{H}^+ + \mathrm{He}^+)\lg(5\times 10^7T^{1.5}\nu^{-1})(\mathrm{cm}^{-1}).$$

由于平均冈特因子 $\overline{g}_{ff}(\nu,T)$ 对 ν 和 T 的依赖关系是很弱的对数关系，所以这个表示式也常被写成大大简化的形式. 对于 $0.1<\nu<50\mathrm{GHz}$ 及 $6,000<T<18,000\mathrm{K}$ 范围，k_c 可以相当准确地近似为

$$k_c \simeq 0.21a(\nu,T)T^{-1.35}\nu^{-2.1}N_eN(\mathrm{H}^+ + \mathrm{He}^+), \quad (7.42)$$

其中 $a(\nu,T)$ 为非常接近于 1 的一个慢变因子，$a(\nu,T)\simeq 1$，误差不超过 10%.

按照(3.35)式，线吸收系数 k_L 为

$$k_L(\nu_{mn}) = \frac{\pi e^2}{m_0c}f_{nm}\frac{N_n}{\Delta\nu_D}\left(1-\frac{g_nN_m}{g_mN_n}\right).$$

由于高激发态的寿命通常大于碰撞时间，在碰撞跃迁概率远大于辐射跃迁的情况下，粒子数按能级的分布将很好地遵从玻耳兹曼公式

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n}e^{-h\nu_{mn}/kT},$$

因而

$$k_L(\nu_{mn}) = \frac{\pi e^2}{m_0c}\cdot\frac{N_n}{\Delta\nu_D}f_{nm}(1-e^{-h\nu_{mn}/kT}).$$

在射频波段，有 $h\nu_{mn}\ll kT$，故

$$k_L(\nu_{mn}) = \frac{\pi e^2}{m_0 c} \cdot \frac{N_n}{\Delta\nu_D} f_{mn}\left(\frac{h\nu_{mn}}{kT}\right). \qquad (7.43)$$

能级 n 上的原子数 N_n 可以用沙哈-玻耳兹曼方程定出;因为现在局部热平衡条件成立,

$$N_n = N_e N(\mathrm{H}^+) \frac{h^3}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}}\left(\frac{g_n}{2p_i}\right)\exp\left(\frac{h\nu_{n\infty}}{kT}\right). \qquad (7.44)$$

其中 N_e,$N(\mathrm{H}^+)$分别是电子和氢离子的数密度,而 $h\nu_{n\infty}=\frac{I_{\mathrm{H}}}{n^2}$是氢原子在能级 n 的电离能,$g_n=2n^2$ 是能级 n 的简并度.好在对于通常温度在 10^3—10^5K 的气体,离子配分函数 $p_i\simeq 1$,而且 $\exp\left(\frac{h\nu_{n\infty}}{kT}\right)\simeq 1$,故

$$N_n = N_e N(\mathrm{H}^+) \frac{h^3}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} n^2. \qquad (7.45)$$

把(7.45)式以及(7.33)式给出的 ν_{mn} 值代入(7.43)式,并把 $k_L(\nu_{mn})$简单记为 k_L,就得到

$$k_L \simeq 3.3\times 10^{-12} N_e N(\mathrm{H}^+) T^{-2.5}\Delta\nu_D^{-1} f_{mn} n^{-1}\Delta n, \qquad (7.46)$$

k_L 的单位仍是 cm^{-1}.

把求得的线心处吸收系数(7.46)式和连续谱吸收系数 k_c(7.42)式代入到(7.41)式中,则对于氢原子($Z=1$)相邻能级的跃迁 $\Delta n=1$ 而言,得到

$$\Delta\nu_D \frac{T_L^B}{T_c^B} = 2.5\times 10^{-12}(a^{-1}(\nu,T))T^{-1.15}\nu^{2.1}$$

$$\cdot(6 f_{mn} n^{-1})\left(\frac{N(\mathrm{H}^+)}{N(\mathrm{H}^+ + \mathrm{He}^+)}\right). \qquad (7.47)$$

在通常的宇宙等离子体中,氢占压倒多数,故

$$N(\mathrm{H}^+)/N(\mathrm{H}^+ + \mathrm{He}^+) \simeq 1,$$

而 f_{nm}可以由理论上求得.对于 $50<n<100$ 范围,且当 $\Delta n=1$ 时,可求出$(f_{nm}n^{-1})\simeq 0.20$,故有$(6f_{nm}n^{-1})\simeq 1.20$(目前更精确的计算值是 1.16).(7.47)式中的 $a(\nu,T)\simeq 1$(目前更精确的值是 0.98).这样,上式中三个带括号的因子的数值都很接近 1.只要射电观测

定出了谱线宽度 $\Delta\nu_D$ 及亮温度比 T_L^B/T_c^B，则可确定等离子体电子温度 T. 目前用这种方法（即测射电复合线强度与相邻射电连续谱强度之比）得到的几个星云的电子温度约在 8,000—10,000K 之间.

最后说明一个问题，为什么射电复合线的讨论很不同于光学复合线（例如巴尔末线），不是简单地只求线的强度 $I_L(\nu)$ 或者亮温度 $T_L(\nu)$，而是求强度比 I_L/I_c 或者亮温度比 T_L^B/T_c^B. 这主要是出于实测方法的考虑. 实际上，射电望远镜所能测量的量不是辐射强度，甚至不是亮温度 T^B，而是“天线温度”T_A. 一般情况下，天线温度值 T_A 也不同于源的亮温度 T^B，但幸运的是，射电望远镜所测出的线心与紧邻谱线连续区的天线温度之比 T_A^L/T_A，，则与亮温度比 T_L^B/T_c^B 相等，$T_A^L/T_A=T_L^B/T_c^B$，这就是我们讨论强度比的原因.

§7.6 两电子式的复合(Dielectronic Recombination)

对于一个处于充分高温和低密度的复杂离子等离子体，有另一种可以和复合辐射相竞争的复合过程存在，即“两电子式的复合”(Burgess，1965，*Ap. J.*，**141**，1588). 在此过程中，入射到净电荷为 Z 的离子上的外来电子，使离子产生了碰撞激发，同时这个损失了动能的电子被俘获到该离子的另一激发态上，使离子净电荷成为$(Z-1)e$. 这离子中有两个电子处于不同激发态上. 不妨把这种复合过程和前面的辐射复合过程作一比较. 复合辐射实际上也是某种碰撞-复合过程，可以看成是外来电子与离子发生了轫致碰撞而后电子被俘获. 显然，这两种复合有类似之处. 在两电子式复合中，离子是被双重激发的，这两个电子总的激发能实际上已超过了$(Z-1)e$ 净电荷的离子的电离能，因此系统是不稳定的，容易产生自电离（即熟知的欧谢效应，或叫内光电效应，即一个电子跃回基态时，使另一个激发态电子电离）. 其结果是离子净电荷重新成为 Ze. 但这种复合并非一定没有辐射，在有些情况下，这一双重激发离子的一个激发态电子也会通过辐射跃迁回到低能态，使得复合成为有效.

由于激发离子需要足够大的能量，只有能量充分大的电子才能以这种方式复合. 对于具有麦氏分布的电子作平均后，就会在复合系数中引进一个指数因子 $e^{-\Delta W/kT}$，此处 ΔW 是离子激发能. 总的复合速率系数可近似写为

$$\alpha_d \simeq CT^{-\frac{3}{2}}e^{-\Delta W/kT}, \tag{7.48}$$

其中系数 C 的数值范围是 10^{-3}—10^{-1}. 对于净电荷的值 $Z \gtrsim 5$ 的离子，C 值一般会更大些；对于所有 $z \gtrsim 1$ 的离子，C 值较小. 这是由于净电荷大的离子对电子的库仑引力较大，增大了碰撞机会(关于两电子式复合的详细讨论参见 Burgess, *Ap. J.*, **141**(1965), 1588; Burgess and Summers, *Ap. J.*, **157**(1969), 1007; Shore, *Ap. J.*, **158**(1969), 1205).

将(7.13)式和(7.48)式作比较，可见当温度升高时，复合辐射速率下降，而两电子式复合速率却上升. 当 $kT \gtrsim 0.3\Delta W$ 时，两电子复合过程将超过辐射复合过程.

在过高的电子和光子密度下，将会由于碰撞和光电离使激发态电子逸出离子，从而使两电子式复合速率下降.

§7.7 束缚-自由吸收(光电吸收)

与讨论热轫致辐射一样，复合辐射也存在反过程. 净电荷为 $(Z-1)e$ 的离子也可以吸收光子，使离子产生光电离，其净电荷成为 Ze，这就是束缚-自由吸收过程，或称光电吸收. 按量子力学计算，一个处在主量子数 n 的能级上的类氢离子，由于吸收频率为 ν 的光子而产生光致电离的吸收截面是(例如参见 Karzas, W. J., and Latter, R., 1961, *Astrophys. J. Suppl.*, 6, 167)

$$\begin{aligned}\sigma_{bf}(\nu,n) &= \frac{32\pi^2 e^6 R_\infty Z^4}{3\sqrt{3}\,h^3\nu^3 n^5} g_{fb}(\nu,T) \\ &\simeq 2.8\times 10^{29}\frac{Z^4}{\nu^3 n^5} g_{fb}(\nu,T),\end{aligned} \tag{7.49}$$

其中 $R_\infty = 109733\text{cm}^{-1}$，是里德伯常量；$g_{fb}$ 是自由-束缚冈特因子，

在光学波段，$g_{fb}\simeq 1$. 注意能级 n 的光致电离的阈值频率是 $\nu_n=\frac{Z^2 I_H}{hn^2}$. 当外来光频率 $\nu<\nu_n$ 时，光电吸收不可能，$\sigma_{bf}=0$. 当 $\nu=\nu_n$，吸收陡然增到极大；当 $\nu>\nu_n$，则吸收截面 $\sigma_{bf}\propto\nu^{-3}$，随频率快速下降.

由光电截面可求气体光电吸收系数 $k_{bf}(\nu)$. 这是对连续谱的一种重要的吸收机制，对光学波段以上的较高频段连续谱，光电吸收远大于前述自由-自由吸收. 对于原子序数为 Z 的类氢离子(当 $Z=1$，即为氢原子)，若处在主量子数为 n 的能级上的原子数密度为 N_n，则能级 n 的类氢离子贡献的光电吸收系数为 $k_{bf}(\nu,n)=N_n\sigma_{bf}(\nu,n)$. 在 $k_{bf}(\nu,n)\sim\nu$ 曲线上，阈值频率 $\nu_n=\frac{Z^2 I_H}{hn^2}$处的尖锐极大称为吸收边. 当 $\nu>\nu_n$，$k_{bf}(\nu,n)$作 ν^{-3}衰减.

总光电吸收系数为

$$k_{bf}(\nu)=\sum_{n>n_0}N_n\sigma_{bf}(\nu,n), \tag{7.50}$$

其中 N_n 为能级 n 的离子数密度. 求和应当对所有电离能小于吸收光子 $h\nu$ 的量子态进行，即$\frac{Z^2 I_H}{n^2}\leqslant h\nu$. 在局部热平衡条件下，$N_n$ 由沙哈-玻耳兹曼方程给出：

$$N_n=N_e N_Z\frac{h^3}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}}\frac{g_n}{2}\exp\left(\frac{\chi_n}{kT}\right), \tag{7.51}$$

$\chi_n=\frac{Z^2 I_H}{n^2}$是类氢离子能级 n 的电离能，g_n 是能级 n 的权重，$g_n=2n^2$.

实际做求和计算时，常常只取 $n\gtrsim n_0$ 的有限几项，这是足够好的近似. 这一方面是由于通常有 $N_1\gg N_2\gg N_3\cdots$，另一方面 $\sigma_{bf}\propto\frac{1}{n^5}$，故有$\sigma_1\gg\sigma_2\gg\sigma_3\cdots$.

在 X 射线天文学中，由于频率高达 10^{17}—10^{19}Hz，光子能量 1—10keV，故 $Z=1$ 的氢原子光电吸收系数非常小，而丰度很小的重元素对 X 射线的光电吸收反变得重要，因为 $Z\gg 1$. 这些重原子既可能存在于气相之中，也可能含于星际介质的尘埃微粒之中. 它

们是 $h\nu \lesssim 1\text{keV}$ 的 X 射线辐射的重要吸收源. 作为多电子原子的重原子，其内层电子的电离势很高，只有软 X 射线和远紫外波段光子有可能使其电离，主量子数 $n=1,2,3$ 的内壳层分别称作 K，L，M 壳层. 在粗略地估计重原子内壳层电子的 X 射线光电吸收截面时(特别是对 K 壳层)，可以近似采用类氢公式(7.49)，只要计及内壳层电子的库仑屏蔽作用对序数 Z 的适当修正即可. 这相当于略去重原子外层大玻尔轨道上电子存在对截面的修正，这一近似示意于图 7.1. 这一近似有合理性，众所周知，原子玻尔轨道半

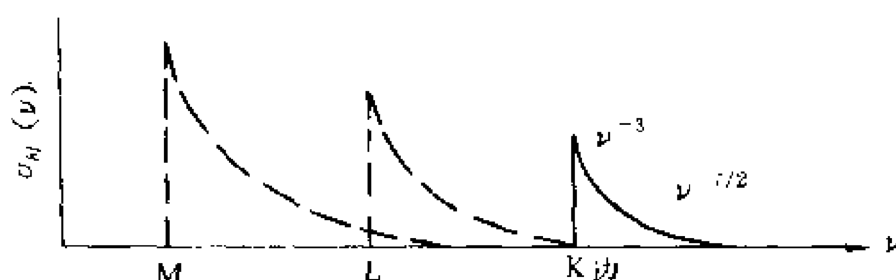


图 7.1

径 $r \propto n^2$，因此主量子数 n 大的外层电子远离原子核，对内层电子的物理性质影响极小. 就以 K 壳层计算为例，重要的修正反倒是两个 K 电子的相互屏蔽作用引入的对(7.49)式中 Z 值的小改正. 较严格的重原子光电吸收截面的计算结果已列表(参见 Reilman and Manson，*Ap. J. Sup.*，**40**，815，1979).

参 考 文 献

[1] Aldrovandi，S. and Pequignot，D. ，*Astro. Ap.* ，**25**(1973)，137.

[2] Aller，L. and Liller，W. ，in Nebulae and Interstellar Matter ed. B. Middlehurstand L. Aller，Chicago Univ. Press. ，1968.

[3] Beigman，I. ，Vainshtein，L. and Vinogradov，A. ，*Sov. Astro.* ，**13**(1970)，775.

[4] Bethe，H. and Salpeter，E. ，Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms，Academic Press，New York，1957.

[5] Burbidge，G. ，Gould，R. and Pottasch，S. ，*Ap. J.* **138**(1963)，945.

[6] Burgess，A. ，*Ap. J.* ，**141**(1965)，1588.

[7] Burgess，A. and Summers，H. ，*Ap. J.* ，**157**(1969)，1007.

[8] Cox, D. and Tucker, W., *Ap. J.*, **157**(1969), 1157.

[9] Culhane, J., *M. N. R. A. S.*, **144**(1969), 375.

[10] Delmer, T., Gould, R. and Ramsay, W., *Ap. J.*, **149**(1967), 495.

[11] Dupree, A. and Goldberg, L., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **8**(1970), 231.

[12] Elwert, G., *Z. Naturforsch*, **9a**(1954), 637.

[13] Gould, R. and Thakur, R., *Ann, Phys.*, **61**(1970), 351.

[14] Pacholczyk, A., Radio Astrophysics, Freeman, San Fransisco, 1970.

[15] Pengelly, R., *M. N. R. A. S.*, **127**(1964), 145.

[16] Rilman, R. F. and Manson, S. T., *Ap. J.*, **40**(1979), 815.

[17] Seaton, M., *M. N. R. A. S.*, **119**(1959), 81.

[18] Frank H. Shu, The Physics of Astrophysics, Vol. 1, Radiation, Mill Valley, California, University Science Books, 1991.

[19] Shore, B., *Ap. J.*, **158**(1969), 1205.

[20] Spitzer, Jr. L., *Ap. J.*, **107**(1948), 6.

[21] Tarter, C., *Ap. J.*, **168**(1971), 313.

[22] Tarter, C., *Ap. J.*, **181**(1973), 607.

[23] Tucker, W. and Koren, M., *Ap. J.*, **168**(1971), 295.

[24] Tucker, W., Radiation Processes in Astrophysics, MIT Press, Combridge, Mass., 1976.

第八章　碰撞激发(退激发辐射)

观测天文学中,光谱学是一个古老的分支,然而其重要性却至今未见衰减.通过对原子分子谱线的研究,能够得到关于宇宙各种尺度上的各类天体(恒星、星系、类星体、总星系)的丰富的定量知识.通过对谱线的频率、强度、宽度及轮廓等的测量,能够了解物质的化学成分和物理状态(例如温度、密度、团块速度等).由于光谱学内容极为丰富,很难用短短一章作全面概括.限于本书主题,我们的兴趣集中于辐射机制的讨论.本章着重说明碰撞激发产生发射谱线的辐射过程.

上一章已指出,复合-级联跃迁过程可以产生原子发射线.事实上,观测到的相当多的明辉谱线都是由这种复合过程产生的,其中最重要的是 H 和 He^+的巴尔末系.但是,有许多发射谱线,例如各种离子的禁线发射,却无法用这种机制解释.例如,O^{++}离子(光谱学记号是[O Ⅲ])的两条禁线 N_1(5007 Å)和 N_2(4959 Å)就不可能是由这种机制产生的.理由是 O^{++}离子的电离能为 54.5eV,几乎是氢电离能的四倍.欲使 O^{++}离子发生光致电离,尔后再产生复合谱线,就必须设想气云的近旁有某个能产生很强紫外线辐射的高温恒星,其温度甚至达到百万度以上,另外一个理由是,由于 O^{++}和 He^+的电离能几乎一样,后者为 54.2eV,这两种离子的再电离需要吸收同一波段的紫外线辐射.倘若 O^{++}离子的 N_1 和 N_2 线确为复合线,则按强度来说,这两条线不应当超过 He^+线;因为在一般等离子体中,He 原子的丰度远高于 O 原子.但实测表明,在许多情况下,O^{++}离子的绿色双线 N_1 和 N_2 为最强,可是几乎没有 He^+线.

所有这些说明,除去光电离-复合机制外,一定还有其它产生原子发射线的机制.目前知道,产生原子发射线的主要机制有三

种：1. 复合-级联跃迁过程；2. 电子碰撞激发；3. 共振荧光. 本章将限于讨论第二种.

当等离子体中的自由电子和原子（或离子）碰撞时，会引起原子的激发，产生谱线辐射. 这种辐射消耗自由电子的动能，所以也是等离子体中一种重要的冷却过程.

归根到底，等离子体中自由电子的能量还是来自恒星的紫外辐射. 一个炽热的 O 型或 B 型恒星的表面有效温度超过 30,000K，能大量辐射紫外线. 这些紫外光子被等离子体中的原子、离子吸收，就引起光致电离. 同时把超过原子电离能的多余能量转移给被打出的电子，成为自由电子的动能. 自由电子在等离子体中完成三项任务：1. 自由电子彼此之间的频繁碰撞，结果是建立了电子气的平衡态速度分布——麦克斯韦分布，其温度约为 10^4K. 由于电子之间的库仑力是长程力，决定了这种碰撞截面远远大于其它过程的截面. 因此可以认为，平衡分布是先于其它过程迅速建立起来的. 2. 自由电子和离子相遇，产生韧致辐射和复合辐射. 3. 自由电子和离子的非弹性碰撞，引起离子（或原子）的激发，产生辐射.

事实上，许多离子在可见光区域的禁线发射，就是上面第三种过程产生的（例如，N Ⅱ 即 N^+ 离子在红光，O Ⅱ 即 O^+ 在紫光，O Ⅲ 即 O^{++} 在绿光波段出现的禁线）. 不难了解，为什么这种碰撞激发机制对这些离子的禁线发射非常有效. 就以 O Ⅲ 的 N_1，N_2 绿色双线为例，两禁线的激发能量都很低，只有 2.5eV，即亚稳态是低受激态. 对于温度 $\simeq 10^4$K 的电子气，平均动能为 $kT \simeq$ 1eV，可以和激发能比较. 因此，相当多的电子都有足够的能量来激发这些能级. 同样可以了解，为什么许多允许线的辐射又很难用这种碰撞机制说明，就是由于产生允许线跃迁的激发态能量通常比基态高很多，结果使平均动能仅约 1eV 的电子无法实现这种碰撞激发. 例如，中性氢和氦的最初几个激发态的能量已经很高，约 10—20eV，所以只有为数极少的电子能够碰撞激发这些原子（不过镁原子 MgI 的允许跃迁 $3^1S \rightarrow 3^3P$ 产生的 4751 Å 的发射线是个例外，这条允许

线的激发能仅仅 2.7eV，很容易实现碰撞激发. 所以经常会遇到一个情况——对同一个星云同时观测到明亮的允许线（如 H_α，H_β 等）和明亮的禁戒线（如 O Ⅲ 5007 双线），但发射线的产生机制完全不同，前者来自复合-级联，后者则产生于碰撞激发. 氢和氧元素的丰度相差三个量级，但发射线强度相近. 原因是复合截面很小，$\sigma_R \sim 10^{-20}\mathrm{cm}^2$. 比碰撞激发截面 σ_{if} 小了近三个量级（见 § 8.6）.

既然这种谱线发射机制对禁线的产生最有效，所以有必要先来说明选择定则和禁线的概念.

§ 8.1 选择定则（关于偶极辐射）

光谱学中已经知道，并非任何一对原子能级之间的辐射跃迁都是可能的. 第二章中已给出偶极近似下从给定初态 i 到终态 f 的自发辐射跃迁概率是

$$A_{if}=\frac{4\omega_{fi}^3}{3\hbar c^3}|\boldsymbol{D}_{fi}|^2, \tag{2.40}$$

式中 $\omega_{fi}=\dfrac{E_f-E_i}{\hbar}$ 是玻尔频率，而

$$\boldsymbol{D}_{fi}=e\boldsymbol{r}_{fi}=e\int u_f^* \boldsymbol{r} u_i d\tau$$

是偶极矩矩阵元. 注意，这里 A_{if} 的意义与(2.40)原式略有不同，原式中 A_{if} 代表从能级 E_i 的一个态 i 到能级 E_f 所有态的平均跃迁概率，而这里的 A_{if} 指的是从特定初态 i 到特定终态 f，$i\rightarrow f$ 的跃迁概率. 推导过程是相同的.

由(2.40)式可见，当 $\boldsymbol{D}_{fi}=0$，则偶极辐射跃迁 $i\rightarrow f$ 就不可能实现. 对于给定的原子，从一切跃迁 $E_i \rightleftharpoons E_f$ 中选出真有可能实现的跃迁的法则称为选择定则. 偶极近似下的选择定则在一般量子力学书中都有. 为了本书需要，这里仅列出结果.

8.1.1 氢原子光谱的选择定则

已经知道，氢原子的定态波函数是

$$u_{nlm}(r,\theta,\varphi)=C(l,m)R_{nl}(r)P_{lm}(\cos\theta)e^{im\varphi}.$$

式中 $P_{lm}(\cos\theta)$ 的缔合的勒让德多项式，$R_{nl}(r)$ 则是一个可用拉盖尔多项式的导数表示的多项式，$C(l,m)$ 是归一化常数. 利用 u_{nlm} 可以计算偶极矩矩阵元. 由于电矩矩阵元与电子的坐标矩阵元只相差一个乘数 e，所以只需求坐标矩阵元

$$\boldsymbol{r}_{fi}=\int u_f^* \boldsymbol{r} u_i d\tau \qquad (8.1)$$

即可. 由于算子 $\boldsymbol{r}$ 本身具有奇宇称（即当空间坐标对原点作反演时，$x,y,z\to -x,-y,-z$，或者 $r,\theta,\varphi\to r,\pi-\theta,\pi+\varphi$，$\boldsymbol{r}$ 改变符号），由此可知，当初、终两态波函数的宇称相同时，积分(8.1)将等于零. 因此，不作具体的计算就可以知道，具有相同宇称的两个态间的跃迁是禁戒的（拉波特法则）.

对于氢原子的电子波函数 $u_{nlm}(r,\theta,\varphi)$ 而言，已知它的宇称由轨道量子数 l 决定. 当 l 是偶数时，态 $u_{nlm}(r,\theta,\varphi)$ 具有偶宇称（空间坐标反演下，波函数不变号）. l 是奇数，具有奇宇称，即宇称性由量 $(-1)^l$ 决定. 因此，在偶极近似下，仅当初、终两态的宇称的奇偶性不同时，跃迁才是可能的.

拉波特法则只提供了一个关于跃迁可能性的粗略的判据，要得到具体的氢原子选择定则，仍需完成对(8.1)式的积分. 结果得到关于轨道角量子数 l 的选择定则是

$$\Delta l=l'-l=\pm 1, \qquad (8.2)$$

即初、终两态的轨道量子数只能相差 1，才可使得(8.1)式不为零. 关于磁量子数 m 的选择定则是

$$\Delta m=m'-m=0,\pm 1. \qquad (8.3)$$

主量子数 n 的改变可以是任意的，不受任何选择定则的限制. 显然，(8.2)式对轨道量子数 l 的改变的限制比拉波特法则更严.

8.1.2 复杂原子的选择定则

以上得到的氢原子的选择定则(8.2)式和(8.3)式也可应用于碱金属光谱. 对这些原子（Li，Na，K，…）而言，常见的最有实际重

要性的跃迁是这样一些跃迁，即其中初、终两态都只有一个松弛地束缚在外层轨道上的价电子，原子的其余电子则未受扰动. 这些态可以近似看成是一个类氢的系统，由一个价电子和一个离子实组成，价电子在离子实的有心力场中运动. 因此，价电子的跃迁可以应用选择定则(8.2)式和(8.3)式.

对于其它的复杂原子，以上单电子光谱的选择定则不再适用. 但已证明，关于偶极辐射的以下选择定则成立(例如见 Condon and Shortley, "The Theory of Atomic Spectra").

关于原子中各电子的总的轨道角量子数 L，有

$$\Delta L=0, \pm 1 (\text{但 } 0 \not\leftrightarrow 0). \tag{8.4}$$

关于总自旋角量子数 S，有

$$\Delta S=0. \tag{8.5}$$

关于原子的总角量子数 $J(J=L+S)$，

$$\Delta J=0, \pm 1, (\text{但 } 0 \not\leftrightarrow 0). \tag{8.6}$$

关于投影量子数 $M_J=M_L+M_S$，有

$$\Delta M_J=0, \pm 1. \tag{8.7}$$

此外，在复杂原子偶极跃迁过程中，电子组态会改变，必有一个电子发生 $nl \to n'l'$ 的跃迁. 对该电子而言，还必须遵从以下选择定则：

$$\Delta l=\pm 1. \tag{8.8}$$

最后，复杂原子也有类似于氢原子的拉波特法则，即跃迁过程中，前后两态的宇称必须改变，即

$$\text{奇宇称} \Longleftrightarrow \text{偶宇称}.$$

这里指出，对复杂原子来说，宇称是 $(-1)^{\sum_i l_i}$，其中 l_i 代表第 i 个电子的轨道角量子数.

§8.2 振子强度求和定则　氢原子跃迁概率

所有满足偶极辐射选择定则的允许跃迁也并不具有相同的跃迁概率，要定出 $i \to f$ 的跃迁概率 A_{if}，仍需从(2.40)式出发. 但由(2.45)式可知，A_{if} 也可以用吸收振子强度 $f_{(i,f)} \equiv f_{(f \to i)}$ 表示，即

$$f_{(i,f)}=\frac{m_0c^3}{2e^2\omega_{if}^2}A_{if}(\text{当 }E_i>E_f). \tag{2.45}$$

式中 $f_{(i,f)}$ 的定义由(2.42)式给出，即

$$f_{(i,f)}\equiv\frac{2m_0|\boldsymbol{D}_{fi}|^2\omega_{if}}{3e^2\hbar}. \tag{2.42}$$

对于能级 E_i,E_f 有简并情况，A_{if} 则与平均振子强度 $\bar{f}_{(i,f)}$ 有联系[见(2.46)式]，

$$\bar{f}_{(i,f)}=\left(\frac{g_i}{g_f}\right)\frac{m_0c^3}{2e^2\omega_{if}^2}A_{if}. \tag{2.46}$$

式中 $\bar{f}_{(i,f)}$ 由(2.43)式给出，

$$\bar{f}_{(i,f)}\equiv\frac{1}{g_f}\sum_{if}f_{(i,f)}, \tag{2.43}$$

g_f 是 E_f 能级的权重，g_i 是 E_i 的权重.

在 $E_i>E_f$ 的情况下，$\omega_{if}=\frac{1}{\hbar}(E_i-E_f)>0$，故由(2.42)式及(2.43)式定义的 $f_{(i,f)}$ 及 $\bar{f}_{(i,f)}$ 是大于零的正数，称为吸收振子强度. 当 $E_i<E_f$，则 $f_{(i,f)}$ 或 $\bar{f}_{(i,f)}$ 为负，称为发射振子强度(这些名词都来源于量子力学的介质色散理论). 注意，对于给定能级 E_i,E_f，假定 $E_i>E_f$，则吸收振子强度 $\bar{f}_{(i,f)}$ 与发射振子强度 $\bar{f}_{(f,i)}$ 一般不相等，两者关系是(以上均见第二章)

$$g_i\bar{f}_{(f,i)}=-g_f\bar{f}_{(i,f)}. \tag{2.44}$$

总之，知道了振子强度，也就确定了跃迁概率. 因此，光谱学中经常用振子强度观念代替跃迁概率. 由于这一观念在光谱学中经常碰到，所以让我们暂时离开本章讨论的主题，即碰撞激发的辐射机制，说些与此无关的题外话，讨论有关振子强度和跃迁概率的问题. 这些问题是经常在文献中见到的.

本节介绍关于振子强度的一个有用的性质——振子强度求和定则. 它在光谱学中经常用到，它不仅可用来从一组相对值中确定绝对振子强度值，也可用来检验测量与理论之间的内部自洽性. 此外，还可用它给出原子跃迁行为的一般性结论. 这里只列举几个最

常见的求和规则：

1. Thomas-Reiche-Kuhn 定则

这一定则对任何原子都成立，不论原子的耦合方式是 L-S 耦合还是 j-j 耦合. 设原子中电子数为 Z，该原子由状态 $i \rightarrow f$ 跃迁的振子强度记为 $f_{(f,i)}$，它的定义由(2.42)式给出. 将 $f_{(f,i)}$ 对所有终态 f 求和，则有

$$\sum_f f_{(f,i)} = Z. \tag{8.9}$$

这就是 Thomas-Reiche-Kuhn 求和定则. 式中 Z 是原子中电子数. 由于吸收振子强度 $f_{(f,i)}>0$，而发射振子强度 $f_{(f,i)}<0$，故由(8.9)式可见，对于由特定态 i 到所有终态 f 的跃迁，吸收跃迁占优势(因为 Z 是一个正数).

2. Wigner-Kirkwood 求和定则

这是关于氢原子的平均振子强度的求和法则. 如果初态 i 属于氢原子能级 $E_{n,l}$(n，l，分别是主量子数和轨道角量子数)，终态 f 属于能级 $E_{n'l'}$，则按(2.43)式的定义，平均振子强度

$$\bar{f}_{(f,i)} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m=-l}^{l} f_{(f,i)},$$

式中 $2l+1=g_i$ 是初态 i 的简并度(权重). 以下我们把 $\bar{f}_{(f,i)}$ 改记为 $\bar{f}_{(nl\rightarrow n'l')}$，Wigner-Kirkwood 定则是

$$\begin{aligned} \sum_{n'} \bar{f}_{(n,l\rightarrow n',l-1)} &= -\frac{l(2l-1)}{3(2l+1)}, \\ \sum_{n'} \bar{f}_{(n,l\rightarrow n',l+1)} &= \frac{(l+1)(2l+3)}{3(2l+1)}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

(8.10)式又称为“部分和定则”. 由这一定则可见，对于所有 $n,l\rightarrow n',l-1$ 的跃迁，发射跃迁(即 $n'<n$)占据优势；因为(8.10)式中的第一个和式为负值，而发射振子强度 $\bar{f}_{(n>n')}<0$. 反之，对于 $n,l\rightarrow n',l+1$，则 $n'>n$ 的吸收跃迁占优势(因为吸收振子强度 $\bar{f}_{(n'>n)}>0$).

也可以把(8.10)式改写为

$$\sum_{n'<n} \mathcal{F}_{(n,l\to n',l-1)} + \sum_{n'>n} \mathcal{F}_{(n,l\to n',l-1)} = \frac{-l(2l-1)}{3(2l+1)},$$

$$\sum_{n'<n} \mathcal{F}_{(n,l\to n',l+1)} + \sum_{n'>n} \mathcal{F}_{(n,l\to n',l+1)} = \frac{(l+1)(2l+3)}{3(2l+1)}. \qquad (8.10')$$

(8.10′)的两个等式中，第一个和式$\sum\limits_{n'<n}$代表所有发射振子强度和(因而为负)，第二个和式$\sum\limits_{n'>n}$代表所有吸收振子强度和(因而为正). 从(8.10)式形式的 Wigner-Kirkwood 定则可见，主量子数 n 和角量子数 l 的改变有相同符号的跃迁过程，比 n,l 的变化具有相反符号的跃迁更有可能.

3. 对于任何可以近似采用 L-S 耦合的多电子原子，还有一个有用的求和法则：

从给定态 $nLJM$ 到 $n'L'$(但有不同的 $J'M'$)的各子能级，与不考虑自旋的理论中由 $nLM_L\to n'L'$ 各子能级(不同的 M'_L)的总跃迁概率相等，即

$$\sum_{J'M'} |\langle n'L'J'M'|\boldsymbol{r}|nLJM\rangle|^2$$

$$= \sum_{M'_L} |\langle n'L'M'_L|\boldsymbol{r}|nLM_L\rangle|^2. \qquad (8.11)$$

由此可见，任一个精细结构能级的寿命与总角量子数 J,M 无关，并且与不考虑自旋的理论结果相同. 同样，激发跃迁概率也与量子数 J,M 无关. 因而从能级 nLJ(对 M 求和)到具有相同 $n'L'$ 但有各种 $J'M'$ 值的所有子能级的跃迁的所有谱线的总强度将正比于初始能级的权重$(2J+1)$. 光谱学中常用这一求和定则来确定双重线和三重谱线的相对强度.

对于复杂原子，振子强度值的计算很困难. 但对于氢原子，这一计算已经准确地作出，这里只将结果简述如下(详细的讨论参见 Bethe and Salpeter, Encyclopedia of Physics, Vol. 35, 1957).

为了求得氢原子跃迁概率 $A_{nl\to n'l\pm1}$，就必须算出以下的径向积分

$$(r)_{nl,n'l\pm1} = \int_0^\infty R_{n,l} R_{n',l\pm1} r^3 dr. \qquad (8.12)$$

已知氢原子的径向波函数是缔合拉盖尔多项式，代入上式完成积分，对于莱曼线系($1S\to nP$)的计算结果是

$$(r)^2_{10,n1}=[2^8n^7(n-1)^{2n-5}/(n+1)^{2n+5}]a_0^2, \qquad (8.13)$$

式中 a_0 是玻尔半径.

有了径向积分(8.13)式，则按(2.42)式及(2.43)式可以进一步计算莱曼系($1S$-nP)的平均振子强度

$$\bar{f}_{(10\to n1)}=2^8n^5(n-1)^{2n-4}/3(n+1)^{2n+4}. \qquad (8.14)$$

进一步可由(2.46)式求出跃迁概率 $A_{n1\to 10}$. 这一公式中出现的频率 $\omega_{if}=2\pi\nu_{if}=2\pi\nu_{n1}$ 可以设法消去，因为

$$\frac{h\nu_{n1}}{I_H}=\frac{n^2-1}{n^2}, \qquad (8.15)$$

其中 I_H 是氢的电离能.

因此，莱曼系 $nP\to 1S$ 的跃迁概率为

$$A_{n1\to 10}=\frac{1}{3}[8\times 10^9\times 2^8n(n-1)^{2n-2}/3(n+1)^{2n+2}] \quad (s^{-1}), \qquad (8.16)$$

而每个 nP 电子产生莱曼线的发射功率为

$$P_{n1\to 10}=h\nu_{n1}A_{n1\to 10}. \qquad (8.17)$$

对于氢原子的允许跃迁，还可以列出如下的一般性结论(见上述(Bethe and Salpeter 的著作).

1. 对于给定的主量子数 n,n'，如果 n 和 n' 都足够大，则有以下很精确的近似公式(即使 n,n' 不是大数，该公式也不会偏离 2 倍)，

$$\begin{aligned}\bar{f}(n\to n')&=\frac{1}{g_n}\sum_{l,l',m,m'}f_{(nlm\to n'l'm')}\\&\simeq\frac{1}{g_n}\left(\frac{64}{3^{3/2}\pi}\right)\frac{R^3c^3}{\nu_{nn'}^3}\left|\frac{1}{n^3n'^3}\right|\\&=\frac{1}{g_n}\left(\frac{64}{3^{3/2}\pi}\right)\frac{n^3n'^3}{(n'^2-n^2)^3}. \qquad (8.18)\end{aligned}$$

2. 频率 $\nu_{nn'}$ 最小时，$\bar{f}_{(n\to n')}$ 成为最大. 但是可以证明，$n'\to n$ 的辐射跃迁概率 $A_{n'\to n}$ 却与频率 $\nu_{nn'}$ 成正比，$A_{n'\to n}\propto\nu_{nn'}$(当 $E_{n'}>E_n$).

例如，对于 $4P\to 1S,2S,3S$ 三个允许跃迁，三者振子强度之比为 $1:3.5:16$，但跃迁概率的比却为 $23:3:1$.

由此得出结论，由初态 nl 产生的一切可能的辐射跃迁中，一定是到最低能态（只要不违背偶极辐射的选择定则）的跃迁概率最大，即跃迁到 $n'=1,l'=l-1$ 的能态概率最大，而由 n,l 到基态 1，0 的级联跃迁过程的最可能的形式是经过 l 次辐射跃迁到达基态（因为每步跃迁中，都只能有 $\Delta l=\pm 1$），其中每步跃迁都是以尽可能大的"跨度"（即主量子数改变 Δn 尽可能大）实现.

§8.3 选择定则（关于电四极矩和磁偶极矩辐射）

偶极辐射的选择定则是从跃迁概率公式(2.40)出发得到的，但(2.40)式只是近似公式（见第二章）. 推导(2.40)式时，曾将(2.27)式中的矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=A(t)\boldsymbol{l}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

作了近似，即令 $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\simeq 1$，即假定了在原子范围内场势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 均匀，与位置无关. 如果作更高阶的近似，即在泰勒展开

$$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=1+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\cdots$$

中，保留到第二项，就能得到更精确的跃迁概率公式，它将包含磁偶极辐射和电四极矩辐射的贡献（见第二章）. 实际情况下，外场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 也不一定是平面偏振波，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 的泰勒展开的一般形式是

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t))_i=(A_i)_0+x_j\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_i}{\partial x_j}\right)_0+\frac{x_jx_k}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\boldsymbol{A}_i\right)_0+\cdots,$$

式中 x_i,x_j,x_k 等是矢量 $\boldsymbol{r}$ 的分量，$\boldsymbol{A}_i$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 i 分量，脚标 0 表示在 $\boldsymbol{r}=0$ 处的值，重复指标代表求和.

将以上展开式代入(2.25)式，得到微扰算符为

$$\begin{aligned}\hat{H}'(\boldsymbol{r},t)&=\frac{e}{m_0c}\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\\&=\frac{e}{m_0c}\left[(\boldsymbol{A}_i)_0\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i+x_j\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_i}{\partial x_j}\right)_0\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_i+\cdots\right],\end{aligned}$$

也可以改写为

$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{m_0c}\left[\boldsymbol{A}_0\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_0)\cdot(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}})+\cdots\right].$$

利用这一微扰算符，则代替(2.40)式，得到更精确的跃迁概率公式是

$$A_{if}=\frac{4\omega_{fi}^3}{3\hbar c^3}\left[|\mathscr{D}_{fi}|^2+|\boldsymbol{M}_{fi}|^2+\frac{3}{40}\frac{\omega_{fi}^2}{c^2}|\mathscr{D}_{fi}|^2\right].\tag{8.19}$$

其中第一项就是电偶极矩的跃迁概率公式，与(2.40)式一致.

第二项为

$$A_{if}^{(M)}=\frac{4\omega_{fi}^3}{3\hbar c^3}|\boldsymbol{M}_{fi}|^2,\tag{8.20}$$

它代表磁偶极辐射的跃迁概率，磁偶极矩算子是

$$\boldsymbol{M}=\frac{e}{2m_0c}(\boldsymbol{L}+2\boldsymbol{S}).$$

第三项是

$$A_{if}^{(Q)}=\frac{\omega_{fi}^5}{10\hbar c^5}|\mathscr{D}_{fi}|^2\tag{8.21}$$

是电四极矩跃迁概率公式，电四极矩算符为

$$\mathscr{D}=e(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}-\frac{1}{3}r^2\boldsymbol{I}).$$

由(8.19)式可见，对于给定态 i 和 f，即使偶极矩阵元 $\mathscr{D}_{fi}=0$ (即在偶极近似下是禁戒的)，仍有可能实现 $i\rightarrow f$ 的跃迁，尽管这一跃迁概率远小于非零的偶极辐射跃迁概率. 这个小的跃迁概率来自磁偶极矩和电四极矩的贡献.

从(8.20)式和(8.21)式出发，可以得到磁偶极辐射和电四极辐射的选择定则.

对于电四极矩辐射的选择定则是：

关于总角量子数 J，

$$\Delta J=0,\pm1,\pm2$$

$$\left(\text{但}0\nleftrightarrow0,\frac{1}{2}\nleftrightarrow\frac{1}{2},0\nleftrightarrow1\right).\tag{8.22}$$

关于磁量子数(投影量子数)M_J，

$$\Delta M_J=0,\pm1,\pm2. \tag{8.23}$$

关于总的轨道角量子数 L，

$$\Delta L=0,\pm1,\pm2, \tag{8.24}$$

$$(\text{但 } 0\nleftrightarrow 0, 0\nleftrightarrow 1).$$

关于总自旋角量子数 S，

$$\Delta S=0. \tag{8.25}$$

电四极矩跃迁中，可以发生或者不发生单电子的跃迁. 单电子跃迁 $nl\rightarrow n'l'$ 中，必须遵守以下选择定则：

$$\Delta l=l'-l=0,\pm2 \tag{8.26}$$

最后，电四极矩跃迁中，宇称不改变，即

偶(奇)宇称⟷偶(奇)宇称

对于磁偶极矩辐射的选择定则如下：

$$\Delta J=0,\pm1$$

$$(\text{但 } 0\nleftrightarrow 0),$$

$$\Delta M_J=0,\pm1,$$

$$\Delta S=0,$$

$$\Delta L=0, \tag{8.27}$$

磁偶极跃迁中，电子组态不会改变，即没有一个电子的主量子数 n 和角量子数 l 会改变，于是有

$$\Delta n=0, \qquad \Delta l=0. \tag{8.28}$$

此外，和电四极矩跃迁一样，宇称不会改变.

可见，磁偶极矩跃迁只发生在具有相同宇称、相同电子组态、相同 L 和 S 值的两态之间. 由于这样两态的能量差很小，频率 ω_{fi} 小，因此由(8.20)可见，一般来说磁偶极矩跃迁概率是很小的.

为了便于比较和记忆，把上述各种跃迁的选择定则列于表 8.1 中.

必须指明的是，表 8.1 给出的选择定则只对 L-S 耦合情况才是严格适用的. 有些天体物理中感兴趣的跃迁情况，如 O^{++} 离子(OⅢ)的 $^1D_2$-$^3P_2$ 跃迁，虽说属于磁偶极辐射，但该跃迁却破坏了磁偶极辐射的选择定则 $\Delta S=0$，原因就在于它不是纯粹 L-S 耦

合,而是一种中间型耦合,S 并不是很好的量子数.

表 8.1　原子光谱的选择定则

电偶极矩	磁偶极矩	电四极矩
(1)$\Delta J=0,\pm1$ (但 $0 \nleftrightarrow 0$)	$\Delta J=0,\pm1$	$\Delta J=0,\pm1,\pm2$ (但 $0 \nleftrightarrow 0, \frac{1}{2} \nleftrightarrow \frac{1}{2}, 0 \nleftrightarrow 1$)
(2)$\Delta M=0,\pm1$	$\Delta M=0,\pm1$	$\Delta M=0,\pm1,\pm2$
(3)宇称$(-1)^{\sum_i l_i}$ 改变	宇称不变	宇称不变
(4)有单个电子的 能态跃迁 $\Delta l=\pm1$	没有单电子跃迁 $\Delta n=0,\Delta l=0$	可以有,也可以没有单电子跃迁,若有则 $\Delta l=0,\pm2$
(5)$\Delta S=0$	$\Delta S=0$	$\Delta S=0$
(6)$\Delta L=0,\pm1$ (但 $0 \nleftrightarrow 0$)	$\Delta L=0$	$\Delta L=0,\pm1,\pm2$ (但 $0 \nleftrightarrow 0, 0 \nleftrightarrow 1$)

§8.4　禁线

原子光谱学中,凡是破坏了偶极矩辐射的选择定则的跃迁都称为禁戒跃迁,这种跃迁产生的谱线称为禁线. 禁戒跃迁之所以成为可能,主要原因就是电四极矩和磁偶极矩跃迁的作用,尽管概率很小. 此外,还有其它一些原因. 例如,自由原子受到外场作用,甚至受到原子核的扰动,也会破坏偶极辐射的选择定则,产生禁戒跃迁. 如果原子处在一些低激发态上,偶极辐射的选择定则禁止这些原子自发跃迁到基态上去,而只能靠电四极矩或磁偶极矩作用完成这一跃迁. 其结果是原子会长久停留在这些低激发态上(例如,10^{-2}s). 这样的激发态称做亚稳态. 图 8.1 给出一般等离子体中常见的一些离子的最低能级组态. 图中虚线表示禁戒跃迁,并且标上了这些禁线的波长. 虚线上方的能级就是亚稳态能级. 举 OⅢ 离子为例,其低受激态能级$^1D_2$ 和基态^3P 有相同的电子组态,都是 6 个束缚电子,组态都是 $1S^22S^22P^2$. 因此,按表 8.1 的选择定则,$^1D \to {}^3P$ 的电偶极辐射跃迁是禁戒的(因为现在无电子组态变化),但

这一跃迁却与电四极矩辐射的选择定则相容(除去 $\Delta S=0$ 被破坏),产生绿色双线 5007 Å 和 4959 Å,这是著名的禁线. 同样,$^1S_0\to{}^1D_2$ 是电偶极辐射的禁戒跃迁(因为现在 $\Delta L=2$),但却被电四极辐射的选择定则所允许,出现禁线 4363 Å.

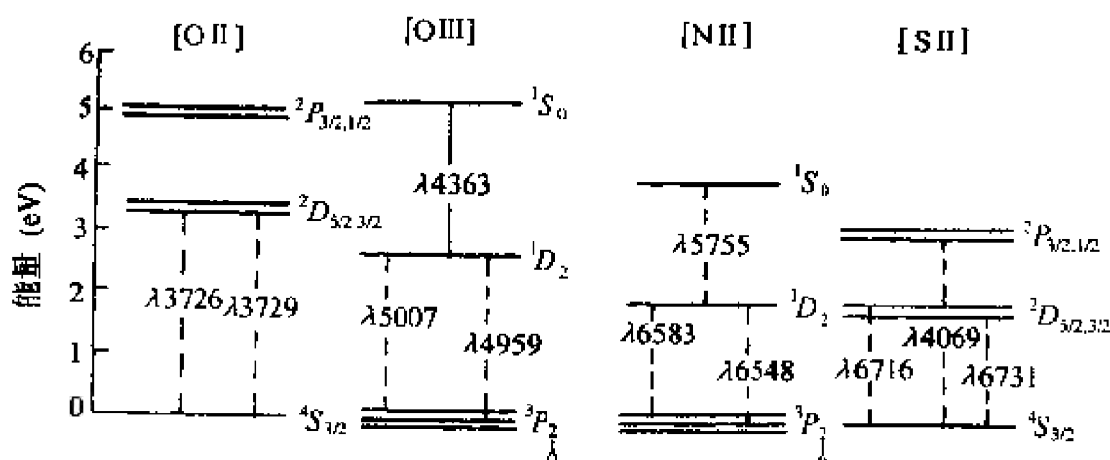


图 8.1

观察图 8.1,就会注意到,具有相同电子组态两种离子,例如[O Ⅱ](即 O^+ 离子)和[S Ⅱ](即 S^+ 离子)或者是[O Ⅲ](O^{++} 离子)和[N Ⅱ](N^+ 离子),这两组离子分别有相似的能级结构.

实验室条件下观测不到禁线,原因就是处在亚稳态上的原子会停留很长时间才自发跃迁到低能级上;而在实验室条件下,真空度不高,容器容积也很有限,以致在原子停留于亚稳态的长时间中,就会由于碰撞退激发而无辐射地回到低能态. 然而在天体物理条件下,例如各种星云物质及星际气体中,等离子体密度非常低,以致碰撞退激发的时标可以接近甚至高于亚稳态的寿命. 这样,亚稳态原子有足够的时间完成电四极矩和磁偶极矩跃迁而辐射禁线. 观测到的禁线常常很明亮,这是由于气云的巨大质量造成的.

在天体物理学中,目前比较重要的禁线有[O Ⅲ]的绿色双线,即 5007 Å 和 4959 Å,[N Ⅱ]的 6548 Å 和 6583 Å 等等. 另外一个比较重要的禁线例子是中性氢原子的 21cm 射电谱线. 产生 21cm 辐射跃迁的原因是,氢原子基态 $1^2S_{1/2}$ 由于质子、电子的磁矩相互作

用而分裂，两个能级间隔极小，仅 $6\mu eV$，其间的跃迁显然违背了电偶极矩的选择定则 $\Delta l=\pm1$，这一跃迁是磁偶极矩跃迁. 跃迁概率仅为 $A\simeq10^{-14.5}/s$. 只是由于银河中性氢的绝对数量极大，才保证了 21cm 禁线有足够的强度.

§8.5 谱线发射系数

现来计算电子碰撞激发所产生的禁线的谱线发射率 j_L. 设原子从能级 m 自发跃迁到能级 n 的概率是 A_{mn}，在激发能级 m 上的原子(离子)数密度是 N_m，则谱线发射率(也称为谱线发射系数)为

$$j_L=N_mA_{mn}h\nu_{mn}\quad(\mathrm{erg\cdot s^{-1}\cdot cm^{-3}}).\tag{8.29}$$

因此，若要计算 j_L，需要知道 N_m 和 A_{mn}，但要注意，不能随便用玻耳兹曼公式定粒子数 N_m. 在多数天体物理情况下，系统常常远离局部热平衡状态；若要确定分布 N_m，只能根据稳定条件下进入和离开能级 m 的粒子数相等的考虑得到，即求解稳态平衡方程组. 为便于说明问题，试考虑一个简单的两能级(n,m)系统，用 $N_eN_nq_{nm}$表示单位时间单位体积中因与自由电子碰撞而进入能级 m 的粒子数，q_{nm}称为碰撞激发速率系数(请类比上章的复合速率系数概念)，再用 $N_eN_mq_{mn}$和 N_mA_{mn}分别表示因碰撞和因自发辐射而从能级 m 跃迁到 n 的粒子数，q_{mn}称为碰撞退激发速率系数. 平衡条件下有

$$N_eN_nq_{nm}=N_eN_mq_{mn}+N_mA_{mn},\tag{8.30}$$

该式就是用来确定分布 N_m/N_n 的统计平衡方程. 由它得到

$$\frac{N_m}{N_n}=\frac{N_eq_{nm}}{N_eq_{mn}+A_{mn}}.\tag{8.31}$$

建立(8.30)式的前提是假定辐射场能密度很低，可以略去受迫跃迁的影响. 其次，(8.30)式中只考虑了电子碰撞，而略去了离子碰撞作用. 一般情况下，电子碰撞作用大大超过重粒子间的碰撞；定性的物理解释是：质量很小的电子有比离子大得多的热运动速度.

若要定出分布 N_m/N_n，需要从理论上知道 A_{mn}，q_{nm}及 q_{mn}. 为了求 q_{mn}及 q_{nm}，首先需要求出电子碰撞激发（和退激发）截面 $\sigma_{mn}(v)$ [和 $\sigma_{nm}(v)$]. 这是一个非常复杂的理论课题. 但即使没有截面值，也可从一般热力学考虑找到 q_{nm}和 q_{mn}之间一个普遍关系式. 为此，将(8.30)式应用于一个极限情况. 令电子密度 N_e 很大，使得

$$N_e q_{nm} \gg A_{mn}, \tag{8.32}$$

故(8.31)式化为

$$\frac{q_{nm}}{q_{mn}} = \frac{N_m}{N_n}.$$

但 N_e 很大时，碰撞作用远超过辐射. 频繁的碰撞将使气体迅速建立热平衡分布，从而

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n}\exp\left(-\frac{E_m - E_n}{kT}\right),$$

由此得到

$$q_{nm}/q_{mn} = \frac{g_m}{g_n}\exp\left(-\frac{E_m - E_n}{kT}\right). \tag{8.33}$$

把(8.31)式代入(8.29)式，就得到了谱线发射率. 在 $N_e \to 0$ 和 $N_e \to \infty$ 的两个极端情况下，应有

$$j_L = \begin{cases} N_e N_n q_{mn} h\nu_{mn}, & (\text{当 } N_e \to 0), \\ N_n q_{nm} q_{mn}^{-1} A_{mn} h\nu_{mn} & (\text{当 } N_e \to \infty). \end{cases} \tag{8.34}$$

这里 $N_e \to \infty$ 表示的是 $N_e q_{mn} \gg A_{mn}$ 情况，这时粒子有热平衡分布. $N_e \to 0$ 表示 $N_e q_{mn} \ll A_{mn}$. 从(8.34)式可见，不同的密度 N_e 情况下，j_L 值可以很不相同. 根据谱线强度的分析，有可能得到自由电子密度值 N_e.

§8.6 电子碰撞激发截面，碰撞强度

首先对电子碰撞激发截而 $\sigma_{mn}(v)$ 作些粗糙的定性估计. 当速度为 v 的电子以瞄准距离 b 入射时，它在离子近旁的库仑力作用时间 $\tau \simeq \frac{2b}{v}$，所以电子动量改变为

$$\Delta p \simeq \int_0^\tau F dt \simeq \left(\frac{e^2}{b^2}\right)\left(\frac{2b}{v}\right) \simeq \frac{2e^2}{bv}, \tag{8.35}$$

因而电子能量的损失为(粗略认为电子碰后静止)

$$\Delta E(b) \simeq \frac{(\Delta p)^2}{2m_0} \simeq \frac{2e^4}{m_0 v^2 b^2}. \tag{8.36}$$

这部分能量可以无辐射地转移给离子,使离子激发或电离. 由(8.36)式可以估计速度为 v(或能量为 $E=\frac{1}{2}m_e v^2$)的电子能量转移 $\Delta E(b)$ 的截面的量级为

$$\sigma \simeq \pi b^2 \simeq \frac{\pi e^4}{E \cdot \Delta E} = 4\pi a_0^2 \left(\frac{I_H}{E}\right)\left(\frac{I_H}{\Delta E}\right). \tag{8.37}$$

其中 a_0 的氢原子玻尔半径,I_H 是氢原子基态电离能(13.6eV). 最后一步等式用到一个熟知的关系 $\frac{e^2}{2a_0}=I_H$. (8.37)式实际上给出了截面 σ 和氢原子几何截面 πa_0^2 的比较. 如果转移的能量 ΔE 恰为离子的 $n \to m$ 的跃迁能量,$\Delta E = E_m - E_n$,则(8.37)式就是电子碰撞激发截面 σ_{mn} 的量级. 它表明,碰撞激发截面很大,可以和氢原子几何截面 πa_0^2 比较,比上一章讨论的复合截面大二至三个量级. 因而对那些丰度很小的重元素,碰撞激发是产生发射线的重要机制.

定量计算激发截面 $\sigma_{mn}(v)$ 是一个相当复杂的量子力学课题,这里只说明计算的主要点(详细的推导参见"Nebulae and Interstellar Matter", Chapter 8, by J. Czyzak).

考虑一个速度为 v 的自由电子和离子的非弹性碰撞. 图 8.2 中,速度为 v 的电子以瞄准距离 b 入射,并和原子发生非弹性碰撞,使原子由态 i 跃迁到 f. 这一跃迁的微分散射截面可写成 $d\sigma_{if}(v,b) = p_{if}(b) \cdot 2\pi b db$,即 $p_{if}(b)$ 表示微分散射截面 $d\sigma_{if}$ 与环形几何截面 $2\pi b db$ 之比. 由此得到碰撞激发(或退激发)截面应为

$$\sigma_{if}(v) = \int_0 p_{if}(b) 2\pi b db. \tag{8.38}$$

由 $p_{if}(b)$ 定义可见,应有

$$\sum_{f \neq i} p_{if}(b) \leqslant 1 \qquad \text{(对任意给定的 } b \text{ 值)}. \tag{8.39}$$

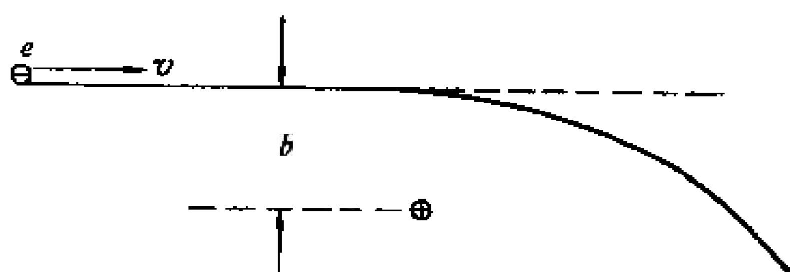


图 8.2

由于入射电子的角动量 L_e 为

$$L_e = m_0 v b = \hbar[l_e(l_e+1)]^{1/2},$$

故

$$2b db = (2l_e+1)\left(\frac{\hbar}{m_0 v}\right)^2 \Delta l_e.$$

因此，入射电子的瞄准距离 b 的改变 db 具有量子化特性，(8.38)式的积分应改为求和的形式. 注意到有心力场中的电子轨道角量子数 l_e 的变化必须满足 $\Delta l_e = 1$，(8.38)式化为

$$\sigma_{if}(v) = \pi\left(\frac{\hbar}{m_0 v}\right)^2 \sum_{l_e} (2l_e+1) p_{if}(l_e). \tag{8.40}$$

通常引进部分碰撞强度和总碰撞强度的概念，其定义分别是

$$\Omega_{if}(l_e) = (2l_e+1) p_{if}(l_e),$$

$$\Omega_{if} = \sum_{l_e} \Omega_{if}(l_e). \tag{8.41}$$

因此，(8.40)式化为

$$\sigma_{if}(v) = \pi\left(\frac{\hbar}{m_0 v}\right)^2 \Omega_{if} \tag{8.42}$$

假如初态 i 属于能级 E_n，终态 f 属于能级 E_m，那么一般说来 E_n，E_m 都是简并的. 简并度分别记为 g_n，g_m，则总的碰撞激发截面（或退激发截面）应将(8.42)式对所有简并态求和再除以初能级 E_n 的简并度，得到

$$\sigma_{nm}(v) = \pi\left(\frac{\hbar}{m_0 v}\right)^2 \frac{1}{g_n}\left(\sum_{i,f} \Omega_{if}\right) = \pi\left(\frac{\hbar}{m_0 v}\right)^2 \frac{1}{g_n} \Omega_{nm}. \tag{8.43}$$

为了便于和定性估值(8.37)式比较，也可用氢原子几何截面

πa_0^2 表示(8.43)式的激发截面，为此将(8.43)式改写一下，注意，玻尔半径 $a_0=\frac{\hbar^2}{m_0e^2}$，$I_H=\frac{e^2}{2a_0}$，所以有

$$\frac{\hbar^2}{m_0^2v^2}=\frac{a_0^2I_H}{E}.$$

这样，(8.43)式化为

$$\begin{aligned}\sigma_{nm}(v)&=\pi a_0^2\left(\frac{I_H}{E}\right)\frac{1}{g_n}\left(\sum_{i,f}\Omega_{if}\right)\\&=\pi a_0^2\left(\frac{I_H}{E}\right)\frac{1}{g_n}\Omega_{nm}.\end{aligned}\qquad(8.44)$$

其中 $\Omega_{nm}\equiv\sum_{i,f}\Omega_{if}$是关于能级 E_n，E_m 的总碰撞强度. (8.43)式或(8.44)式表示的是从能级 E_n 的某一个特定态激发到能级 E_m 所有态的平均碰撞激发截面. 因此，若要计算截面，关键是求碰撞强度(8.41)式，最后求出总碰撞强度 Ω_{nm}.

关于 Ω_{nm}的计算需要求助于量子力学微扰论. 理论推导相当冗长，最后结果还需要借助计算机. 若要详细了解这一困难的专门课题，读者可参考前面所引的专著第八章. 但是，如果把(8.44)式和前面的经典估值(8.37)式作一比较，可以得到碰撞强度的定性估值，即

$$\Omega_{nm}/g_n\simeq 4I_H/\Delta E,\qquad(8.45)$$

其中 $\Delta E=E_m-E_n$. 可见，能级间隔 ΔE 越大，激发截面越小，这符合我们的直观预测.

对(8.43)式[或(8.44)式]作些补充说明：

1. 粗略地说，$\sigma_{nm}(v)$和入射电子的动能有反比关系，$\sigma_{nm}(v)\propto(m_ev^2)^{-1}$(因为 Ω_{nm}对电子速度的依赖很不显著). 可见，低速电子的碰撞激发比高速电子更为有效. 这显然和直观预期一致. 因为低速电子在原子近旁停留更久，有效作用时间更长.

2. 但当电子速度过低，以致其动能不足以产生激发，即 $\frac{1}{2}m_0v^2<E_m-E_n$，这时碰撞激发截面应为 $\sigma_{nm}(v)=0$. 截面公式的完整形式应为

$$\sigma_{nm}(v)=\begin{cases}0 & \left(当\frac{1}{2}m_e v^2<E_m-E_n\right),\\ \pi\left(\frac{\hbar}{m_0 v}\right)^2\frac{1}{g_n}\Omega_{nm} & \left(当\frac{1}{2}m_e v^2\geqslant E_m-E_n\right).\end{cases}\tag{8.46}$$

3. 严格地说，(8.46)式只适用于中性原子. 对于正离子，即使电子速度低于阈值，即$\frac{1}{2}m_0 v^2\leqslant E_m-E_n$，截面 $\sigma_{nm}(v)$仍为有限值. $\sigma_{nm}(v)\neq 0$. 这是由于尽管电子入射速度 v 较小，但到达正离子近旁将会受到库仑引力作用而加速，致使动能增大到阈值以上.

有了截面公式(8.43)，就可求出碰撞激发(和退激发)速率系数 q_{nm}，q_{mn}.

$$q_{nm}=\int_{v_0}^{\infty}vf(v)\sigma_{nm}(v)dv,\tag{8.47}$$

式中 v_0 是速度阈值，$v_0=\left(\frac{2(E_m-E_n)}{m_e}\right)^{1/2}$.

如果电子速度为麦氏分布，

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{m_0v^2}{2kT}\right),$$

可算出速率系数是

$$q_{nm}=8.63\times10^{-6}\frac{1}{g_n}T^{-\frac{1}{2}}\int_{\frac{m_0v_0^2}{2kT}}^{\infty}\Omega_{nm}e^{-\frac{E_K}{kT}}d\left(\frac{E_K}{kT}\right)\qquad(\text{cm}^3\cdot\text{s}^{-1}),$$

其中 $E_K=\frac{1}{2}m_e v^2$ 是电子动能. 实际上，Ω_{nm}并不显著依赖电子速度 v(或者动能 E_K)，可以引入平均碰撞强度 $\bar{\Omega}_{nm}$，其定义为

$$\bar{\Omega}_{nm}=\frac{\int_{\frac{\Delta E}{kT}}^{\infty}\Omega_{nm}e^{-\frac{E_K}{kT}}d\left(\frac{E_K}{kT}\right)}{\int_{\frac{\Delta E}{kT}}^{\infty}e^{-\frac{E_K}{kT}}d\left(\frac{E_k}{kT}\right)}=\frac{\int_{\frac{\Delta E}{kT}}^{\infty}\Omega_{nm}e^{-\frac{E_K}{kT}}d\left(\frac{E_K}{kT}\right)}{e^{-\frac{\Delta E}{kT}}},$$

则速率系数为

$$q_{nm}=8.63\times10^{-6}\frac{1}{g_n}T^{-\frac{1}{2}}\bar{\Omega}_{nm}\cdot e^{-\frac{\Delta E}{kT}}\qquad(\text{cm}^3\cdot\text{s}^{-1}),\tag{8.48}$$

此即需求的速率系数公式，其中 $\Delta E=E_m-E_n=\frac{1}{2}m_e v_0^2$.

表 8.2 列出某些离子的平均碰撞强度值，这些值是假定电子温度 $T \simeq 10^4$K 得到的. 最后一列数值是临界电子密度值 N_e^c. 当 $N_e \gg N_e^c$ 时，谱发射率 j_L 的计算就可以采用(8.34)式中的第二式(即 $N_e \to \infty$ 或 $N_e q_{mn} \gg A_{mn}$ 情况)，这时原子数的能级分布具有简单的玻耳兹曼形式.

表 8.2*

品　种	跃　迁	$A_{mn}(s^{-1})$	Ω_{mn}**	$N_e^c(cm^{-3})$
O Ⅱ	$^2D_{5/2} \to {}^4S_{3/2}$	4×10^{-5}	1.5	$10^{2.2}$
	$^2D_{3/2} \to {}^4S_{3/2}$	2×10^{-4}	1.5	$10^{3.5}$
O Ⅲ	$^1S_0 \to {}^1D_2$	1.6	0.6	10^8
	$^1D_2 \to {}^3P_2$	2×10^{-2}	2.5	$10^{6.8}$
	$^1D_2 \to {}^3P_1$	7×10^{-3}	2.5	$10^{6.8}$
	$^1S_0 \to {}^3P_1$	2×10^{-1}	0.3	10^7
N Ⅱ	$^1S_0 \to {}^1D_2$	1.1	0.4	10^8
	$^1D_2 \to {}^3P_1$	3×10^{-3}	3.0	$10^{4.9}$
	$^1D_2 \to {}^3P_1$	1×10^{-3}	3.0	$10^{4.9}$
	$^1S_0 \to {}^3P_1$	3×10^{-2}	0.4	10^6
S Ⅱ	$^2P_{3/2} \to {}^4S_{3/2}$	3×10^{-1}	2.7	10^7
	$^2D_{5/2} \to {}^4S_{3/2}$	5×10^{-4}	5.7	$10^{3.5}$
	$^2D_{3/2} \to {}^4S_{3/2}$	2×10^{-3}	5.7	$10^{4.5}$

* 根据细致平衡的要求，应当有 $\Omega_{mn} = \Omega_{nm}$.

** 表 8.2 取自"Frontiers of Astrophysics"，1976.

由(8.34)式可知，在 $N_e \to 0$ 的低密度极限下(即 $N_e q_{mn} \ll A_{mn}$，系统显著偏离热平衡情况)，谱线发射率为

$$
\begin{aligned}
j_L &= N_e N_{Z,z} q_{nm} h\nu_{mn} \\
&= N_e N_{Z,z}(8.63\times10^{-6} g_n^{-1} T^{-\frac{1}{2}} \Omega_{mn} h\nu_{mn} e^{-\frac{h\nu_{mn}}{kT}}), \qquad (8.49)
\end{aligned}
$$

j_L 的单位是 erg/(cm^3 · s). (8.49)式中，$N_{Z,z}$ 是 z 次电离的元素 Z 的原子的数密度. 上式暗中假定了原子序数为 Z 的 z 次电离的离子几乎都处在其基态能级 n 上(所以，该种离子在基态 n 的数目几乎就是 $N_{Z,z}$)，在 $N_e \to 0$ 情况下，这一假定显然是合理的. 至于 $N_{Z,z}$ 值的大小则取决于元素丰度及气体电离度，而电离程度则由

给定物理条件下电离与复合两者之间的平衡决定.在忽略光电离的不太强的辐射场情况下,电离仅由电子碰撞引起,而复合却有两种可能:复合辐射过程与两电子式复合过程.由于电离与复合过程都正比于电子密度 N_e,从而可以预料,最终的电离-复合平衡和电子密度 N_e 无关,即 $N_{Z,z}$ 与 N_e 无关. $N_{Z,z}$ 可由以下简单关系定出:

$$N_{Z,z-1}/N_{Z,z}=\alpha_z/C_{z-1}. \tag{8.50}$$

α_z 是由原子序数为 Z 的 z 次电离的离子复合为 $z-1$ 次电离离子的复合速率系数. C_{z-1} 则是由 $z-1$ 次电离态变成 z 次电离的碰撞电离速率系数(由电离平衡求离子数密度的详细讨论可参见 Cox and Tucker, 1969, *Ap. J.*, **157**, 1157).

对一个密度很低,温度不超过 10^7K 的等离子体,碰撞激发下的谱线发射机制成为等离子体最重要的辐射冷却机制.尽管等离子体中大量存在的是质子和电子,它们间的碰撞会产生轫致辐射和复合辐射,并且产生碰撞激发线的元素比质子丰度要低 10^3—10^4 倍(宇宙等离子体的一个典型丰度是:若将原子种类记为 A,其数密度记为 N,则 $A(\lg N)$ = H(12.00), He(11.20), C(8.60), N(8.40), O(8.95), Ne(8.70), Mg(7.43), Si(7.50), S(7.30)).这是由于碰撞激发截面远大于轫致截而和复合截而[试比较(8.44)式,(7.6)式和(6.25)式].只当温度低于 3×10^4K 时,碰撞激发机制才被消弱,而轫致和复合辐射成为主要机制.

§8.7 由禁线强度估计电子温度和密度

有了速率系数(8.48)式,就可按(8.30)式或(8.31)式求出粒子数能级分布,再由(8.29)式计算谱线发射系数 j_L.各条禁线的谱线发射系数之比一般也就是谱线的相对强度(只要气云是光学薄的).对禁线相对强度的分析可以定出星云的主要物理参量,如电子密度 N_e、电子温度 T.其中,像 O^{++} 和 N^+ 这类离子,它们具有能量很不同的激发能级,如 $^1S_0$, $^1D_2$(参见图 8.1).它们的禁线强度最有利于确定电子温度 T.而像 O^+, S^+ 这些离子,具有非常靠近的激发能级,如 $^2D_{5/2}$, $^2D_{3/2}$,其禁线相对强度对温度 T 不敏感,但

最有利于测定电子密度N_e.

先以O^+,S^+为例,说明如何由其禁线相对强度估计N_e. O^+,S^+这类离子,由于有很靠近的激发能级(参见图8.1),禁线是很靠近的双线. 两线强度比值非常敏感地依赖于电子密度N_e. 这在物理上可以给于很直观的说明,因为在稀薄情况下,即电子密度$N_e\to 0$时,可认为这类离子的每次碰撞激发,必然接着有一次禁线光子发射,即碰撞退激发造成的无辐射跃迁完全可忽略. 因此,禁线的强度可以简单地认为正比于激发能级的简并度$2J+1$,J是总角量子数. 于是两相近禁线的强度比几乎就是两个简并度$2J+1$之比(因两相近能级的其它影响强度比的因素都相同,故相消,见下页讨论).

$$\frac{j(O^+,\lambda3726)}{j(O^+,\lambda3729)}=\frac{j(S^+,\lambda6716)}{j(S^+,\lambda6731)}=\frac{2J(^2D_{5/2})+1}{2J(^2D_{3/2})+1}=1.5. \tag{8.51}$$

如果观测的线强度比显然十分接近于1.5,就可判断气云中电子密度N_e必然很小,$N_e\to 0$.

反之,若电子密度较大,$N_e\to\infty$,则碰撞激发和退激发过程占优势,远远超过自发辐射,热平衡的玻耳兹曼粒子数能级分布得以建立. 因此,相邻谱线的强度比应为简并度与自发跃迁概率乘积的比(见下页):

$$\frac{j(O^+,\lambda3726)}{j(O^+,\lambda3729)}=\frac{j(S^+,\lambda6716)}{j(S^+,\lambda6731)}$$
$$=\frac{(2J(^2D_{5/2})+1)\cdot A(^2D_{5/2},{}^4S_{3/2})}{(2J(^2D_{3/2})+1)\cdot A(^2D_{3/2},{}^4S_{3/2})}. \tag{8.52}$$

由表8.2的跃迁概率A_{mn}值可知,无论对[O Ⅱ]双线还是[S Ⅱ]双线,上述比值都大致为0.30左右. 因此,如果观测的强度比十分接近于0.30,则说明星云电子密度值N_e相当大,是稠密态. 这就定性说明了,为什么O^+,S^+的禁戒双线强度比相当灵敏地依赖于电子密度值N_e.

以上结果可从(8.34)式加以说明. 为此,重新列出(8.34)式

如下：

$$j_L=\begin{cases}N_eN_nq_{nm}h\nu_{mn} & (\text{当 } N_e\to 0),\\ N_nq_{nm}q_{mn}^{-1}A_{mn}h\nu_{mn} & (\text{当 } N_e\to\infty).\end{cases}$$

因此，N_e 值不同时，强度值（因而双线强度比）很不相同. 在稀薄情况下，$N_e\to 0$，则应采用(8.34)式中第一式. 式中 $N_eN_nq_{nm}$ 代表单位时间由于碰撞激发由基态 n 到激发态 m 的粒子数，故该式物理意义是：在低密度极限下，离子每次碰撞激发必接着一次 $m\to n$ 的禁线发射，与前面定性分析一致. 由(8.34)式第一式可得，两条相邻禁线强度比值近似等于速率系数 q_{nm} 的比值；而由(8.48)式知，$q_{nm}\propto\frac{1}{g_n}\Omega_{nm}$，$g_n$ 是基态 n 的简并度，Ω_{nm} 是关于基态能级 E_n 和激发能级 E_m 的总碰撞强度，$\Omega_{nm}\equiv\sum_{i,j}\Omega_{i,j}$. 无疑 Ω_{nm} 是个正比于基态和激发态能级简并度 g_n 与 g_m 的乘积的量，即 $\Omega_{nm}\propto g_ng_m$. 因此，碰撞速率系数 q_{nm} 正比于激发能级 m 的简并度 g_m. 由此可见，从(8.34)式第一式即可导出双线强度比确为(8.51)式.

对 $N_e\to\infty$ 的稠密情况，将按照(8.34)式第二式计算，而式中的碰撞速率系数比 q_{nm}/q_{mn} 由(8.33)式给出. 因此，不难导出禁戒双线强度比公式(8.52).

引出(8.34)式时曾指出，电子密度 N_e 是否稠密，取决于自发辐射跃迁概率 A_{mn} 和碰撞无辐射跃迁 N_eq_{mn} 之比较，当 $N_eq_{mn}\ll A_{mn}$ 时，强度计算取(8.34)第一式，$N_e\to 0$. 当 $N_eq_{mn}\gg A_{mn}$，则看成稠密情况，$N_e\to\infty$. 而由 $N_eq_{mn}\simeq A_{mn}$，则可定出临界电子密度 N_e^c，N_e^c 计算值已列于表 8.2 最后一行.

以上讨论还只是说明了为何 O^+，S^+ 的禁戒双线强度比与电子密度 N_e 值有关（虽然，还计算了 $N_e\to\infty$ 和 $N_e\to 0$ 两个极限情况下的强度比值）. 实际感兴趣的是，如何在普遍情况下由观测的强度比定量地估算电子密度 N_e. 一般情况下，计算强度比不能用上述(8.34)的两个极限公式，而仍需由(8.29)式出发，即

$$j_L=N_mA_{mn}h\nu_{mn},$$

而激发能级 m 上的粒子数应由类似于(8.30)式的统计平衡方程

求得[注意，(8.30)式是关于两能级简单系统写出的，而在O^+，S^+离子情况，参与统计平衡的能级不只两个，应写出一组平衡方程]. N_m 值依赖于N_e，T 两个参量. 对于给定的典型温度 $T=10^4$K，写出完全的统计平衡方程组(即包括了图8.1 中^2D，^4S，及^2P 能级)，即可求得[O Ⅱ](即 O^+ 禁线)和[S Ⅱ](即 S^+禁线)的双线强度比作为电子密度 N_e 的函数曲线，如图 8.3(参见 Osterbrock，"Astrophysics of Gaseous Nebulae"，1974).

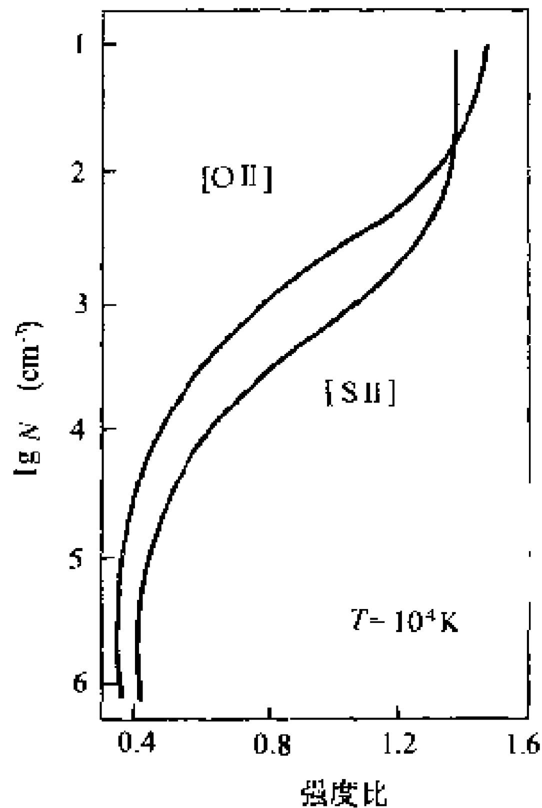


图 8.3

以下再以[O Ⅲ](即 O^{++} 离子的禁线)为例，说明如何计算禁线的相对强度，并如何由它引出星云的电子温度 T，这也是确定等离子体物理状态的重要参量.

首先写出关于 O^{++} 的统计平衡方程，但是注意，不能照搬简单的两能级系统的平衡方程(8.30)式. 理由和前述类似，因为对 O^{++} 而言，参与统计平衡的有三个能级(见图 8.1). 把 O^{++} 离子的^3P，$^1D_2$，$^1S_0$ 三个能级分别记为能级 1，2，3. 对于最高能级 3(即图 8.1 中的$^1S_0$)，方程为

$$N_1N_eq_{13}+N_2N_eq_{23}=N_3(N_eq_{32}-N_eq_{31}+A_{32}+A_{31}); \quad (8.53)$$

对于能级 2(即$^1D_2$)，

$$N_1N_eq_{12}+N_3N_eq_{32}+N_3A_{32}=N_2N_e(q_{23}+q_{21})+N_2A_{21}. \quad (8.54)$$

对于能级 1(基态能级^3P)，方程可类似地列出，但也可由以上两式导出，所以不是独立的，不必写出.

以上统计平衡方程只有两个，但未知数有三个，即 N_1，N_2，

N_3,(N_e 是方程中的参量,假定已用其它方法定出). 好在对于求禁线相对强度时,只需要知道比值 N_3/N_1,N_2/N_1,只有两个值,故方程可以求解.

一般地讲,比值 N_2/N_1 与 N_3/N_1 不可能遵守玻耳兹曼分布. 如果用系数 b_1,b_2,b_3 分别表示三能级上粒子数分布对于玻耳兹曼分布的偏离,则可记为

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{b_2 g_2}{b_1 g_1}\exp\left[-\frac{\chi_2}{kT}\right],$$

$$\frac{N_3}{N_1}=\frac{b_3 g_3}{b_1 g_1}\exp\left[-\frac{\chi_3}{kT}\right], \qquad (8.55)$$

式中 $\chi_2=E_2-E_1$,$\chi_3=E_3-E_1$. 为了方便求解,引入新变数

$$t=\frac{T}{10^4}, \qquad x=\frac{10^{-4}N_e}{t^{1/2}},$$

其中 t 是表征等离子体电子温度的变数. 由于宇宙等离子体的典型温度值 $\sim 10^4$K,故 $t\sim 1$. 而变数 x 是表征等离子体状态的参数,由 N_e,T 值决定;对于 $N_e\simeq 10^4\mathrm{cm}^{-3}$ 的典型情况,$x\sim 1$. 将以上记号代入(8.53)式和(8.54)式,可以定出 b_3/b_1,b_2/b_1(详见 Aller, 1956,"Gaseous Nebulae",p. 192). 求解过程中,定义

$$c=8.63\times 10^{-6}\frac{N_e}{\sqrt{T}}=8.63\times 10^{-4}x,$$

则有

$$\frac{b_3}{b_2}=\left[1+\frac{\Omega_{23}}{\Omega_{12}}\frac{e^{-\chi_{23}/kT}}{(1+\Omega_{23}/\Omega_{13})}+\frac{A_{21}g_2}{c\Omega_{12}(1+\Omega_{23}/\Omega_{13})}\right]$$
$$\times\left[1+\frac{(A_{32}+A_{21})g_3}{\Omega_{13}c(1+\Omega_{23}/\Omega_{13})}\right.$$
$$\left.+\left(\Omega_{32}+\frac{A_{32}g_3}{c}\right)\frac{e^{-\chi_{23}/kT}}{\Omega_{12}(1+\Omega_{23}/\Omega_{13})}\right]^{-1}.$$

显然,随 N_e 增加,c 值将增大,从而 $b_3/b_2\rightarrow 1$,即比值 N_3/N_2 接近热平衡分布,和预期的情况一致. 同理有

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{\left[\Omega_{12}+\Omega_{13}d\exp\left(-\frac{\chi_{23}}{kT}\right)\right]}{\left[\left(\Omega_{12}+A_{21}\frac{g_2}{c}\right)+\Omega_{23}(1-d)\exp\left(-\frac{\chi_{23}}{kT}\right)\right]},$$

其中

$$d=\frac{\Omega_{23}+\frac{A_{32}}{c}g_3}{\Omega_{13}+\Omega_{23}+(A_{32}+A_{31})\frac{g_3}{c}}.$$

如果记

$$\eta_2=\frac{b_2}{b_1},\qquad \eta_3=\frac{b_3}{b_1},$$

则 O^{++}离子的两条绿色禁线的发射率为

$$j_{(5007)}+j_{(4959)}=N_2A_{21}h\nu_{21}=\eta_2N_i\frac{g_2}{g_1}\exp\left(-\frac{\chi_2}{kT}\right)A_{21}h\nu_{21},$$

而另一条 O^{++}的禁线($3\longrightarrow 2$)为

$$j_{(4363)}=N_3A_{32}h\nu_{32}=\eta_3N_i\frac{g_3}{g_1}\exp\left(-\frac{\chi_{23}}{kT}\right)A_{32}h\nu_{32}.$$

从表 8.2 可查出，对于 O^{++}离子有

$$A_{32}=1.6\text{s}^{-1}\qquad A_{31}=0.2\text{s}^{-1}\qquad A_{21}=0.027\text{s}^{-1},$$

以及有关的 Ω_{nm}值，因此可定出 b_2/b_1 和 b_3/b_2. 注意，一般地讲，气体 $N_e\sim10^4\text{cm}^{-3}$, $T\sim10^4\text{K}$, 故 $x\sim1$. 并且 $\exp\left(-\frac{\chi_{23}}{kT}\right)\sim0.1$，最后得到近似解

$$\frac{b_2}{b_1}\simeq\frac{1}{1+\frac{67}{x}},\qquad \frac{b_3}{b_2}\simeq\frac{1+0.027x}{93},$$

因此得到强度比

$$\frac{j(5007)+j(4959)}{j(4363)}\simeq\frac{a10^{\frac{1.43}{t}}}{1+bx}=\frac{a10^{\frac{14,300}{T}}}{1+0.01b\frac{N_e}{\sqrt{T}}}.\qquad(8.56)$$

其中 $a=7.1$, $b=0.027$. 这就是 O^{++}离子禁线的相对强度公式. 如果从观测上定出强度比，又从其它方法估计了 N_e 值，就可用

(8.56)式定出电子温度值T.

参 考 文 献

[1] Bely, O. and Van Regemoter, H., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **8** (1970), 329.

[2] Bethe, H. and Jackiw, R., Intermediate Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968.

[3] Bethe, H. and Salpeter, E., Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms. Academic Press, New York, 1957.

[4] Brown, R. T., *Ap. J.*, **170** (1971), 387.

[5] Burgess, A., Humme, D. and Tully, J., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **266** (1970), 225.

[6] Cohen, M. and Kelly, P., *Canad. J. Phys.*, **45** (1967), 2079.

[7] Condon, E. and Shortley, G., The Theory of Atomic Spectra, Combridge Univ. Press, 1963.

[8] Czyzak, S., in Nebulae and Interstellar Matter, ed. B. Middlehurst and L. Aller, Chicago Univ. Press, 1968.

[9] Chaisson, E. J., in Frontiers of Astrophysics, ed. E. H. Avrett, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1977.

[10] Drake, G., Victor, G. and Dargano, A., *Phys. Rev.*, (**180**) (1969), 25.

[11] Gordwire, H., *Ap. J. Suppl.*, **17** (1968), 1171.

[12] Griem. H., Spectral Line Broadening by Plasmas, Academic Press, New York, 1974.

[13] Green. L., Rush. P. and Chandler, C., *Ap. J. Suppl.*, **3** (1957), 37.

[14] Houston, W., Principles of Atomic Spectra, Dover, New York, 1959.

[15] Jeffries, J., Spectral Line Formation, Blaisdell, Waltham, Mass, 1968.

[16] Kerr, F., in Nebulae and Interstellar Matter, ed. B. Middlehurst and L. Aller. Chicago Univ. Press, 1968.

[17] Layzer, D. and Garstang, R., *Ann Rev. Astro. Ap.*, **6** (1968), 449.

[18] Menzel, D., *Ap. J. Suppl.*, **18** (1969), 221.

[19] Mizushima, Quantum Mechanics of Atomic Spectra and Atomic Structure, Benjamin, New York, 1970.

[20] Osterbrock, D., Astrophysics of Gaseous Nebulae, Freeman, San Fransisco, 1974.

[21] Rank, D., Townes, C. and Welch, W., *Science*, **174** (1971), 1083.

[22] Robinson, B. and McGee, R., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **5** (1967), 183).

[23] Sampson, D., *Ap. J. Suppl.*, **28** (1974), 263.
[24] Seaton, M., *Rep. Prog. Phys.*, **23** (1960), 313.
[25] Seaton, M., in Atomic and Molecular Processes, ed. D. Bates. Interscience, New York. 1962.
[26] Shklovsky, I., Cosmic Radio Waves, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1960.
[27] Shore. B. and Menzel, D., Principles of Atomic Spectra, Wiley, New York, 1968.
[28] Smith, M. and Wiese, W., *Ap. J. Suppl.*, **23** (1971), 103.
[29] Solomon, P., *Phys. Today*, March issue, p. 32, 1973.
[30] Zuckerman, B. and Palmer, P., *Ann. Rev. Astro. Ap.*, **12** (1974), 279.

第九章　切仑柯夫辐射

§9.1　一般性讨论

第一章中已经指出，真空中作等速运动的带电粒子不会产生辐射. 然而对于穿过透明介质的带电粒子，即便是做等速运动，只要其速度大于该介质中光的相速，就会产生一种特殊的辐射. 这种由"超光速"带电粒子引起的过程称为切仑柯夫辐射. 乍看起来，等速粒子会产生辐射，这似乎与经典理论矛盾. 实际上，这种辐射并不是直接由运动粒子本身发出的，而是由于组成介质的原子、分子中的电子在这个"超光速"粒子的场扫过介质时被加速，而发出次波；这些次波互相干涉的结果，可以产生辐射电磁场. 因此，"超光速"粒子实质上只是辐射的"诱导者"，它提供能量使介质中的带电粒子加速并发出次波.

按照相对论，粒子速度 v 当然不可能超过真空中光速 c，但超过介质中光速 $u=\frac{c}{n}$ 却不难实现，这里的 n 是介质折射率. 例如，介质折射率 $n=1.4$，则该介质中的光速 u 仅为真空光速 c 的十分之七. 因此，在该介质中以速度 $v=0.8c$ 运动的快速粒子就是"超光速"的了.

既然切仑柯夫辐射实质上是介质中大量粒子的集体效应，因此从理论上讨论这一辐射现象时，最方便的办法是用介电常数 ε 和磁导率 μ 这样一些宏观物理量描写介质的性质，而不必追究介质中各个粒子的运动细节. 这就是经典观念处理切仑柯夫辐射的基本精神.

定性地说明产生切仑柯夫辐射的物理原因是容易的. 图 9.1(a)示出介质中一个"超光速"带电粒子所激发的电磁波，它非常类似于快速小艇后的尾浪，或者超音速飞机或子弹所形成的气体冲

击波. 由于现在电磁波速小于粒子速度，从而粒子产生的场不可能出现在粒子的前方，而是集中在粒于后方的一个圆锥形区域之中，粒子就位于圆锥顶上. 由图 9.1(a)可见，作为圆锥形场区界面的圆锥面，正是粒子在轨道上各点发出的波的包络面，也就是 t 时刻的波前(作图时，假定初始时刻 $t=0$ 粒子位于 O 点)，整个圆锥体像是与粒子"刚性地"连接着，与粒子一起前进. 结果，呈圆锥面形状的波前将沿着图 9.1(b)中箭头指示的方向，即波前的法线方向以速度 u 推进，即得到一个沿箭头指示方向传播的辐射. 这一辐射波的特性实在与超音速飞机后方的激波非常类似. 不妨将此"超光速"粒子的切仑柯夫辐射称为"电磁激波"(electromagnetic shock-

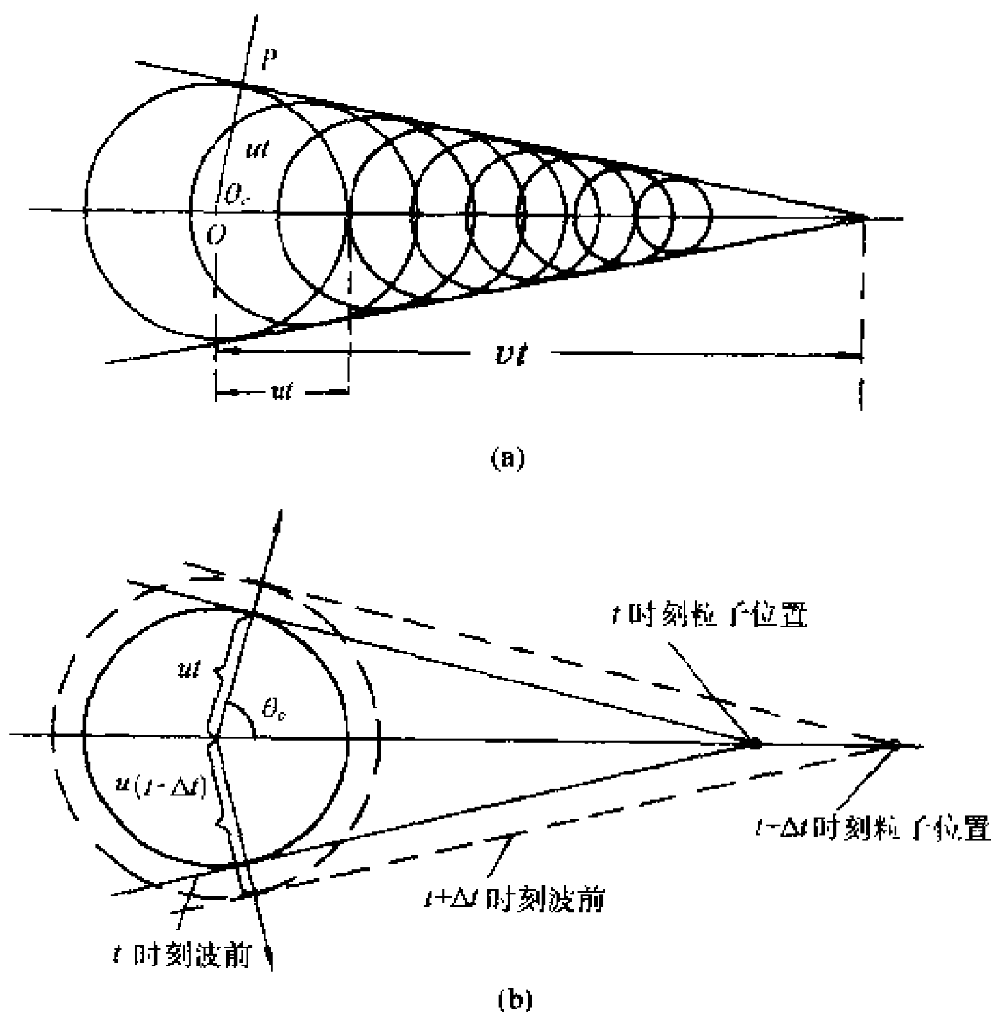


图 9.1

wave).

从图 9.1(a)可见,箭头指示的辐射方向和粒子运动方向之夹角 θ_c 由下式给出:

$$\cos\theta_c = \frac{u}{v} = \frac{c}{nv}. \tag{9.1}$$

也就是说锥面的半张角 θ_i 满足 $\sin\theta_i = \frac{c}{nv}$. 因此,粒子速度 v 越大,锥面越尖锐,面辐射方向偏离粒子速度方向越大. θ_c 称为切仑柯夫角.

由于介质中存在色散现象,即折射率随频率变化,$n=n(\omega)$. 因此,可以预料,在切仑柯夫辐射中,不同频率单色成分的辐射方向将略有不同,或者说,不同频率成分的波前不重合,不集中在同一个锥面上.

进一步需要指出,在圆锥形波场区域之中,各点场强一般不同. 这里不对场强的计算作仔细的定量推导(因为就讨论辐射问题的角度面言感兴趣的只是角分布、谱分布等问题). 概括地说,在锥形区域中,场强的分布情况是:离粒子越远的地方场强越小,越靠近圆锥中轴线的地方场强越小,而在圆锥面波前上及其内侧附近,场强很大,形成一个薄的强场区. 由此可见,波前沿其法线方向的运动即为这一强场区薄层的运动. 因此,辐射具有脉冲性质,是"电磁激波".

至于为什么会有这样一个场强分布,特别是为什么在圆锥面上场强很大? 即使不作定量推导,也可以给予说明. 按第一章(1.6)式,运动的点电荷在任一点的场势应为

$$\varphi = \frac{q}{Kr'} = \left[\frac{q}{Kr}\right]_{推迟},$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{q\boldsymbol{v}'}{Kr'} = \frac{1}{c}\left[\frac{q\boldsymbol{v}}{Kr}\right]_{推迟}.$$

K 是电量改正因子,它反映运动电荷有效电量的变化(即电量由 $q \to \tilde{q} = \frac{q}{K}$,见第一章的讨论). 只是要注意,在介质情况下,$K$ 值中

包括的光速 c 应代以介质中的光速 u，即

$$K = 1 - \frac{v'_r}{u} = 1 - \frac{v_r}{u} = 1 - \frac{v}{u}\cos\theta.$$

按第一章的说明，式中 v'_r 是粒子在 t' 时刻的速度 $\boldsymbol{v}'$ 在同一时刻矢径 $\boldsymbol{r}'$ 上的投影[$\boldsymbol{r}'$ 是由 t' 时刻粒子所在点指向场点(x,y,z)的]，θ 为 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的夹角. 上式中第二个等式是由于我们现在讨论等速运动，因此 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$.

真空情况下，由于粒子速度 $v<c$，故恒有

$$K = 1 - \frac{v_r}{c} > 0.$$

但在介质中，假如粒子速度超过其中光速，$v>u$，则可能在某些情况下出现 $K=0$，从而 $\tilde{q} = \dfrac{q}{K} = \infty$，使场势成为无限大. 这正是圆锥面上各点出现的情况. 例如，图 9.1(a)的圆锥面(即 t 时刻的波前)上任一点 P，在 t 时刻该点的场是在更早的时刻(推迟时)$t'=0$ 粒子位于 O 点时发出的. 由图可知，$t'=0$ 时刻粒子位置 O 到场点 P 引的矢径 $\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{OP}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 之夹角即为 θ_c. 按照(9.1)式，$\cos\theta_c = \dfrac{u}{v}$，因此

$$K = 1 - \frac{v}{u}\cos\theta_c = 0,$$

从而 P 点在 t 时刻的场成为无限大. 对于波前上其它各点，情况类似，从而说明了波前上强场的形成. 当然，实际情况下不可能出现无穷大场强，原因是实际介质折射率 n 是频率的函数，即各种频率成分的场的速度 u 各不相同. 因而它们的波前不重合，不能用同一个锥面代表不同单色成分的波前，锥面将被一个薄的锥形夹层(仍以粒子为顶点)所代替. 这样，无穷大就不会出现，具有无穷大场强的锥面将被一个薄的强场区夹层所代替.

在结束一般讨论之前，必须指出，既然切仑柯夫辐射本质上不是粒子本身的辐射，因此势必具有一些不同于前面各种辐射机制(如同步辐射、轫致辐射、康普顿辐射)的新特点. 最主要的不同点

是：

1. 辐射的方向.

按照(9.1)式，切仑柯夫辐射方向和粒子速度方向不同，并且粒子速度v越大，则夹角θ_c越大，即辐射方向越偏离速度v. 以前各章介绍的相对论粒子的辐射中，辐射方向基本上沿粒子运动方向(例如，同步辐射)；速度越大，辐射越靠近速度方向.

2. 粒子质量对辐射的影响.

在介绍其它各种辐射机制时，我们曾强调指出，质量越大的粒子辐射越弱. 辐射功率$P=\frac{dW}{dt}\propto\frac{1}{m^2}$. 因此，我们通常只关心最轻的荷电粒子——电子的辐射. 而切仑柯夫辐射既然实质上是介质的辐射，运动粒子的作用只是提供一个使介质粒子加速的电磁场. 可见，运动粒子本身的质量对辐射没有影响. 对于质量大的带电粒子，例如质子，与电子的辐射相比，其它各种辐射机制均可略去不计，但其切仑柯夫效应不能忽略. 指出这点或许很有意义；如果在一些天体中由于某种原因(极高的激发温度，宇宙线的次级发射等)而存在大量的质量较大的相对论荷电粒子，如$\mu^{\pm}$，$\pi^{\pm}$等，则它们对切仑柯夫辐射的贡献应当考虑.

§9.2 切仑柯夫辐射的谱分布、角分布、总功率及偏振

为了求一个作匀速运动的超光速“粒子”的切仑柯夫辐射谱，可以利用(1.34)式：

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega}=\frac{q^2\omega^2}{4\pi^2c^3}n(\omega)\left|\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{\tau}\times(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{v}(t))]e^{i\omega\left(t-\frac{n\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\rho}(t)}{c}\right)}dt\right|^2$$

(注意，符号和第一章略有改动，电量改记为q，表示不只限于讨论电子的辐射，辐射方向单位矢改记为$\boldsymbol{\tau}$，以免和折射率n混淆).

当然，由于辐射损耗，粒子不可能作严格等速运动，粒子的运动看成为等速只是一种近似. 这一等速粒子的运动方程简单地表示为

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\boldsymbol{v}t. \tag{9.2}$$

把(9.2)式代入上述谱公式(1.34)式中，并注意$\boldsymbol{v}$是常量，则得到切仑柯夫辐射的谱分布为

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega}=\frac{q^2n}{c^3}|\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{v}|^2\left|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t\left(1-\frac{n}{c}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{v}\right)}dt\right|^2.$$

用θ表示辐射方向$\boldsymbol{\tau}$与速度$\boldsymbol{v}$之夹角，并用ωt表示上式中积分变数，再利用δ函数的表达式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}d\alpha,$$

上式即化为

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega}=\frac{q^2n\beta^2\sin^2\theta}{c}|\delta(1-n\beta\cos\theta)|^2, \tag{9.3}$$

式中$\beta=\frac{v}{c}$. (9.3)式中的δ函数表明，辐射具有显著方向性，只当

$$\cos\theta_c=\frac{1}{n\beta}=\frac{c}{nv}=\frac{u}{v}$$

时才有辐射. 这样就重新得到了切仑柯夫辐射方向公式(9.1).

可能会有这样的疑问：(9.3)式中的δ函数表示沿θ_c方向单位立体角、单位频率间隔中辐射能量是无穷大的. 这一无穷大的出现是由于推导中假定了粒子以速度$\boldsymbol{v}$永远作等速运动所致. 这点体现在上面对时间的积分是从$-\infty\to+\infty$上. 显然，这是不合实际的. 事实上，由于辐射或碰撞损耗，或介质的线度有限，粒子不可能始终以超光速的速度运动. 为了合理起见，假定粒子的有效运动时间为$2T$，则对t的积分限应为$-T$和$+T$，即

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_{-T}^{T}e^{i\omega t\left(1-\frac{n}{c}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{v}\right)}dt=\frac{\omega T}{\pi}\frac{\sin[\omega T(1-n\beta\cos\theta)]}{[\omega T(1-n\beta\cos\theta)]}. \tag{9.4}$$

如果$\omega T\gg1$，则显然这一积分值将在θ_c处达到尖锐极大值，但不再是无穷大了.

代替(9.3)式，应该有

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega}=\frac{q^2n\beta^2}{c}\sin^2\theta\left\{\frac{\omega^2T^2}{\pi^2}\frac{\sin^2[\omega T(1-n\beta\cos\theta)]}{[\omega T(1-n\beta\cos\theta)]^2}\right\}. \tag{9.5}$$

如将(9.5)式对全部立体角积分，则得到单位频率间隔辐射的总能量为

$$W(\omega) = \frac{q^2 n\beta^2}{c}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\left\{\frac{\omega^2 T^2}{\pi^2}\frac{\sin^2[\omega T(1 - n\beta\cos\theta)]}{[\omega T(1 - n\beta\cos\theta)]^2}\right\}d\Omega.$$

已经指出，上式大括号中的量类似于 δ 函数，它在 $\theta=\theta_c$ 处有尖锐的极大. 因此，作积分时，可将式中 $\sin^2\theta$ 因子取出积分号外，并取为 $\sin^2\theta_c$，于是

$$W(\omega) = \frac{q^2 n\beta^2}{c}\sin^2\theta_c\int_0^{\pi}\frac{\omega^2 T^2}{\pi^2}\frac{\sin^2[\omega T(1 - n\beta\cos\theta)]}{[\omega T(1 - n\beta\cos\theta)]^2}d\Omega.$$

式中 $d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$，容易计算得到，上式中的积分值等于$\frac{2\omega T}{n\beta}$. 因此，得到

$$W(\omega) \simeq \frac{q^2\omega}{c^2}\sin^2\theta_c(2c\beta T), \tag{9.6}$$

式中 $2\beta cT=2Tv$ 代表粒子在总的辐射时间 $2T$ 中共走过的路程. 因此，用$(2c\beta T)$除(9.6)式，即得粒子通过单位长路程时在单位频率间隔辐射的总能量为

$$\frac{dW(\omega)}{dx} = \frac{W(\omega)}{2c\beta T} = \frac{q^2\omega}{c^2}(1 - \cos^2\theta_c),$$

即

$$\frac{dW(\omega)}{dx} = \frac{q^2\omega}{c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right).$$

或者，将(9.6)式除以总辐射时间 $2T$，即得到该粒子在 ω 附近单位频率间隔的谱功率 $P(\omega)$，

$$P(\omega) = \frac{W(\omega)}{2T} = \frac{\beta q^2\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)\beta^2}\right). \tag{9.7}$$

(9.7)式给出速度为 β 的粒子的切仑柯夫辐射谱分布. 由该式可见，产生切仑柯夫辐射的条件是

$$n^2 > \frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{c}{v}\right)^2; \tag{9.8}$$

因为当 $n^2(\omega)<\frac{1}{\beta^2}$时，$P(\omega)$成为负值，没有意义. 由于介质的色散，$n=n(\omega)$，故对给定速度 v 的粒子，只当介质的 n 满足(9.8)式，才有辐射. 可见，条件(9.8)式实际上给出切仑柯夫谱的频率范围.

按照(9.1)式，再考虑到介质色散，$n=n(\omega)$，故一定频率 ω 的辐射有一定的角度 θ_c，即 $\theta_c=\theta_c(\omega)$. 重新写出(9.1)式，

$$\cos\theta_c(\omega) = \frac{1}{n(\omega)\beta},$$

故谱分布和角分布之间有一定关系. 微分(9.1)式，可得

$$d\theta_c = \frac{1}{n^2(\omega)\beta\sin\theta_c}\frac{dn(\omega)}{d\omega}d\omega. \tag{9.9}$$

(9.9)式给出，频率为 ω—$\omega+d\omega$ 的单色辐射集中在切仑柯夫角为 θ_c—$\theta_c+d\theta_c$ 的角间隔之中，其中的 θ_c 由(9.1)式给出.

将(9.7)式对频率积分，即得辐射总功率 P，

$$P = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} P(\omega)d\omega = \frac{\beta q^2}{c}\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}}\left(1-\frac{1}{n^2(\omega)\beta^2}\right)\omega d\omega. \tag{9.10}$$

单个快速粒子的切仑柯夫辐射还是线偏振的，电矢 $\boldsymbol{E}$ 处在粒子速度 $\boldsymbol{v}$ 和辐射方向所成的平面内，且与辐射方向垂直. 换言之，在图 9.1 所示的圆锥面波前上的每一点，电矢 $\boldsymbol{E}$ 恰好与过这点的圆锥面母线平行.

§9.3 等离子体的折射率

从公式(9.7)，(9.8)，(9.9)，(9.10)可见，判断能否产生切仑柯夫辐射，以及辐射的谱分布、角分布、总功率的计算，都首先需要知道介质的折射率. 天体物理学中涉及到的透明介质是等离子体. 一般说来，等离子体是一个既有正负电粒子，又含有大量中性原子、分子的复杂体系. 只是在一定条件下，才能达到完全的电离. 天体物理中涉及到的中性气体，实际上也只是一种电离很不充分的等离子体；因为在等离子体物理学中，认为电离度超过千分之一就算是强电离的等离子体了.

既然切仑柯夫辐射发生的可能性取决于折射率 n 的数值，因此在下面(9.3.1 到 9.3.4 小节)将就处于不同物理状态的等离子体的折射率问题作经典讨论，以判断在什么状态下的等离子体有可能发生切仑柯夫辐射. 然后在 §9.4 中讨论切仑柯夫辐射在天

体物理中的应用. 在§9.5 中,将特别列出一小节,详细计算中性气体(实际上就是未充分电离等离子体)的折射率,从理论上证明切仑柯夫谱线辐射的存在及其在高能天体物理中的潜在重要性.

9.3.1 未充分电离等离子体

这也就是中性气体的情况. 由于这时自由电子为数甚少,计算介电常数主要考虑中性原子中的电子对极化的贡献. 在经典理论中,中性原子当作一个电谐振子来处理,即原子中电子与原子核之间以准弹性力 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$ 联系着,$\boldsymbol{r}$ 是由核到电子的位矢,代表电子对平衡位置的位移. 在频率为 ω 的电磁波作用下,电子有受迫振动. 电子一共受到三个力的作用:准弹性力 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$,外场力 $e\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}$(由于电子速度 $v\ll c$,故磁力远小于电场力,可略去)和辐射阻尼力. 按照经典电磁理论,辐射阻尼力为$\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\boldsymbol{r}}$. 因此,电子运动方程为

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}}=e\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}-k\boldsymbol{r}+\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\boldsymbol{r}},$$

即

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\frac{k}{m_0}\boldsymbol{r}-\frac{2e^2}{3c^3m_0}\dddot{\boldsymbol{r}}=\frac{e}{m_0}\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}.$$

如果略去微小阻尼力不计,则上式即为受迫振动方程,即零级近似解为受迫简谐振动,频率为 ω. 从而有 $\dddot{\boldsymbol{r}}=-\omega^2\dot{\boldsymbol{r}}$,故原方程中阻尼项$\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\boldsymbol{r}}$可转化为普通阻尼力形式即 $\boldsymbol{F}_{阻}=-\eta\dot{\boldsymbol{r}}$,$\eta=\frac{2e^2}{3c^3}\omega^2$. 这表明,辐射阻尼力相当于作用在电子上的“摩擦力”. 因此,运动方程可写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\omega_0^2\boldsymbol{r}-\gamma\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{e}{m_0}\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t},$$

其中 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m_0}}$是原子中电子的本征频率,而 $\gamma=\eta/m_0=\frac{2e^2\omega^2}{3m_0c^3}$是阻尼常数,故上式为有阻尼的受迫振动方程,解为

$$\boldsymbol{r} = \frac{e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]} = \frac{e\boldsymbol{E}_0 e^{-i(\omega t+\delta)}}{m_0\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}},$$

其中

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

外场引起该电子的诱导偶极矩 $\boldsymbol{p} = -e\boldsymbol{r}$，如果对单位体积介质内所有原子中的全部电子求和，就得到介质的极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = -\sum e\boldsymbol{r} = \frac{-Ne^2\boldsymbol{E}_0}{m_0\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}e^{-i(\omega t+\delta)}$$

$$= \frac{-Ne^2e^{-i\delta}}{m_0\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}\boldsymbol{E},$$

或者写为

$$\boldsymbol{P} = \frac{-Ne^2}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]}\boldsymbol{E} = \chi\boldsymbol{E}.$$

式中 N 为单位体积中全部原子中的总电子数；χ 为复数，表示 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 有相位差. 因此，根据电感应强度 $\boldsymbol{D}$ 的定义 $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}$，即得介电常数

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]},$$

或者写成

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ &= \left\{1 + \frac{4\pi Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}\right\} \\ &\quad + i\left\{\frac{4\pi Ne^2\gamma\omega}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}\right\}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

这里需要说明 ε 是复数的物理含意，特别是需要说明如何由 ε 求出介质折射率 n，这是切仑柯夫现象所关心的. 显然，这应从麦克斯韦方程出发，因为介质电磁性质(用 ε, μ 表征)对场的影响体现在这组方程中. 如果介质中没有自由电荷，$\rho_f = j_f = 0$，则方程组成为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$. 由此导出电磁场满足的波方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0.$$

它的平面波形式的特解为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.$$

将它代入波动方程可知,其中常数 k 满足关系

$$k = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\omega,$$

$k\sim\omega$ 关系称为色散关系. 由于实际介质在高频情况下总有 $\mu\simeq 1$,故

$$k = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c}\omega. \tag{9.12}$$

由(9.12)式可知,k 也应是复数. $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$,从而波矢$\boldsymbol{k}$的三个分量也是复数,即

$$k_x = k_x' + ik_x'', \; k_y = k_y' + ik_y'', \; k_z = k_z' + ik_z'',$$

或者记为

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' + i\boldsymbol{k}''.$$

代入平面波特解中,得到

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}} e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}} e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.$$

它代表一个沿$\boldsymbol{k}'$方向传播,而振幅沿$\boldsymbol{k}''$方向衰减的平面波,在与$\boldsymbol{k}''$垂直的平面上,振幅 $E_0 e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}$不变;而沿$\boldsymbol{k}''$方向每前进$\frac{1}{k''}$距离时,振幅即衰减 e^{-1}倍. 因而 k''称为衰减长度. 另一方面,与$\boldsymbol{k}'$垂直的平面上各点相位$e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}$相同,而沿$\boldsymbol{k}'$方向每前进$\frac{2\pi}{k'}$,波相改变 2π,故$\frac{2\pi}{k'}$是波长,$\lambda=\frac{2\pi}{k'}$. 因而相速 $u=\omega/k'$.

对于一个各向同性均匀介质，波传播方向和衰减方向显然一致，即$\boldsymbol{k}'/\!/\boldsymbol{k}''$. 因此，可把 $\boldsymbol{k}$ 记为

$$\boldsymbol{k} = (k' + ik'')\boldsymbol{k}_0 ,$$

$\boldsymbol{k}_0$ 是传播方向的单位矢.

概括地说，介电常数 ε 用复数表示这在物理上表明，该介质不只是影响电磁波传播的相速，而且会造成波在传播中的衰减. 衰减的物理原因是介质会吸收电磁波能量. 已知 $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$，就可定出 k' 和 k''[见(9.12)式]，从而找到介质折射率 n；显然 n 包含在 $k' \sim \omega$ 的关系之中. 由于

$$k^2 = (k'^2 - k''^2) + i(2\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}'') = (k'^2 - k''^2) + i(2k'k''),$$

以及(9.12)式

$$k^2 = \frac{\varepsilon}{c^2}\omega^2 = \frac{\varepsilon'}{c^2}\omega^2 + \frac{i\varepsilon''}{c^2}\omega^2,$$

因此得到

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\varepsilon'}{c^2}\omega^2,$$

$$2k'k'' = \frac{\varepsilon''}{c^2}\omega^2,$$

解之即得

$$k' = \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}\,\frac{\omega}{c},$$

$$k'' = \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}\,\frac{\omega}{c}.$$

由此可得折射率 n 为

$$n = \frac{c}{u} = \frac{ck'}{\omega} = \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}.$$

在 ω 不十分接近 ω_0 情况下，$\varepsilon'' \ll \varepsilon'$，因而近似有

$$k' \simeq \sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\omega}{c}, \quad k'' \simeq \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon''}{\sqrt{\varepsilon'}}\,\frac{\omega}{c},$$

以及

$$n \simeq \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{1 + \frac{4\pi N e^2}{m_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{9.13}$$

这就是中性气体折射率的经典公式. 可见,n 由介电常数 ϵ 的实部 ϵ' 决定,而介质的吸收则由虚部决定. 图 9.2 表示 ϵ 的实部 ϵ' 与虚部 ϵ'' 与频率 ω 的关系特性. 决定吸收的虚部 ϵ'' 显然只在共振频率 $\omega \simeq \omega_0$ 附近才显著异于零,才有明显的共振吸收. 而决定折射率的实部 ϵ' 则在紧靠 ω_0 附近频率范围内,随 ω 的增大而减小(反常色

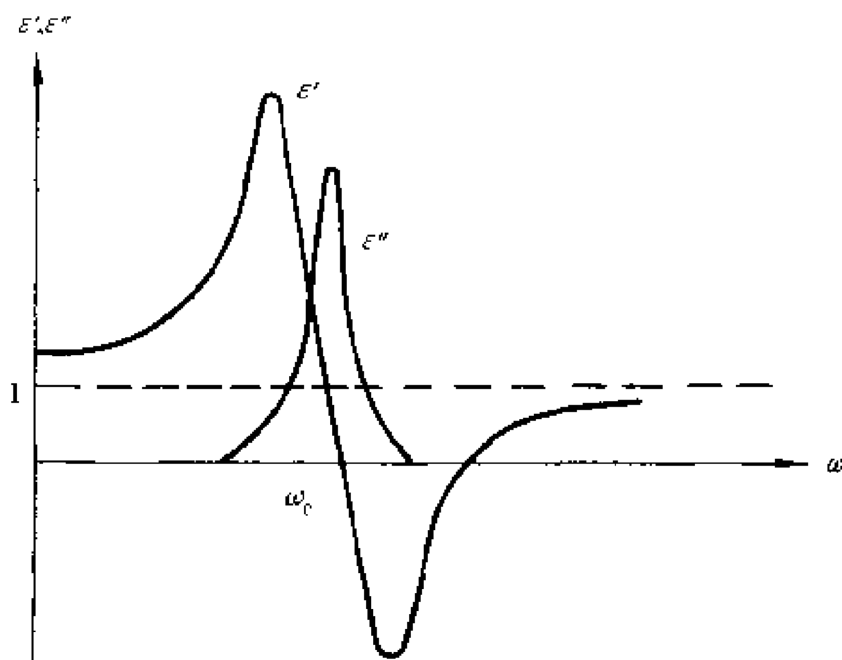


图 9.2

散). 在其余频率区域,ϵ' 随 ω 的增大而增大(正常色散). 图 9.3 为 n^2-ω 曲线,它是由公式 $n^2 = \frac{\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}{2}$ 画出的,只在 ω 远离共振频率 ω_0 处,才有(9.13)式 $n^2 \simeq \epsilon'$. 由(9.13)式或图 9.3 可见,当 $\omega \to \infty$ 或密度 $N \to 0$ 时,$n \to 1$,即介质中光速 $u \to c$. 这是由于当场的变化非常快($\omega \to \infty$)时,电子来不及响应,极化过程实际不发生;而密度过低($N \to 0$),则介质极化对波的影响也可略去.

从图 9.3 还可见,ω_0 附近的反常色散区非常窄,曲线很陡,使 ω_0 具有某种"临界"频率的意义:在 $\omega > \omega_0$ 时,$n^2 \leqslant 1$;而在 $\omega < \omega_0$,

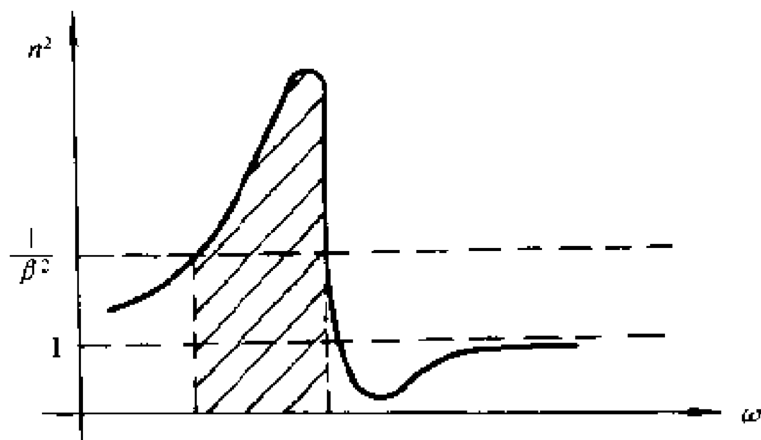


图 9.3

恒有 $n^2>1$. 即只在 $\omega<\omega_0$ 区域,介质光速 $u<c$,有可能发生切仑柯夫辐射. 按照(9.8)式,对于给定速度 v 的快速粒子,其辐射频段由不等式 $n^2\geqslant\frac{1}{\beta^2}=\frac{c^2}{v^2}$ 限定,这一频段在图中用阴影区域示出.

9.3.2 完全电离的等离子体(无场情况)

由于中性原子已全部消失,所以对极化有贡献的只有自由电子;在外加交变场作用下,自由电子受到两个力作用,一个是电场力(仍略去磁场力,因为对于常见的宇宙等离子体,电子温度 $T_e\simeq 10^5$K,故电子平均热运动速度 $v\simeq 10^8$cm/s$\ll c$),另一个是阻尼力 $\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\boldsymbol{r}}\simeq-\frac{2e^2\omega^2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{r}}=-\eta\dot{\boldsymbol{r}}$. 于是电子运动方程为

$$m_0\ddot{\boldsymbol{r}}=-e\boldsymbol{E}_0e^{i\omega t}-\frac{2e^2\omega^2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{r}},$$

或者写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}}+\gamma\dot{\boldsymbol{r}}=-\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m_0}e^{-i\omega t},\quad \gamma=\frac{2e^2\omega^2}{3m_0c^3},$$

解为

$$r = \frac{eE_0}{m_0\omega^2}\frac{1}{1+i\frac{\gamma}{\omega}}e^{-i\omega t} = \frac{eE_0}{m_0\omega^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}}}e^{-i(\omega t+\delta)},$$

$$\delta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\gamma}{\omega}.$$

由于γ是个小量$\left(\frac{\gamma}{\omega}=\frac{2e^2\omega}{3m_0c^3}=\frac{2\times 25\times 10^{-20}\omega}{3\times 10^{-27}\times(3\times 10^{10})^3}\simeq 6\times 10^{-24}\omega\right.$,可见对极高的外场频率,仍有$\left.\frac{\gamma}{\omega}\ll 1\right)$.因此解可简化为

$$r = \frac{eE_0}{m_0\omega^2}e^{-i\omega t} = \frac{e}{m_0\omega^2}E.$$

这表示自由电子在外场中的受迫简谐振动.相应的诱导偶极矩为$p=-er$.设单位体积中自由电子数为N_e,则极化矢量为

$$P = -N_e er = -\frac{N_e e^2}{m_0\omega^2}E = \chi E,$$

由此定出介电常数为

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi = 1 - \frac{4\pi N_e e^2}{m_0\omega^2}.$$

注意,$\sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m_0}}=\omega_p$是等离子体振荡频率,因此$\varepsilon(\omega)$又可写成

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \tag{9.14}$$

必须指出,完全电离等离子体是电的良导体,已经不是通常意义下的介质.(9.14)式引进的介电常数只具有形式上的意义,实际上只是等离子体的等效介电常数.一个完全电离等离子体是由电磁场和自由电荷组成的体系,在理论处理时,应该从无介质情况的麦克斯韦方程组出发,即

$$\nabla\cdot E = 4\pi\rho, \quad \nabla\times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot B = 0, \quad \nabla\times B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j, \tag{9.15}$$

以及

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,\qquad \boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E},$$

式中 ρ,j 分别为自由电荷密度及传导电流密度.

注意,(9.15)式中不含常数 ϵ,μ,这表明对于完全电离等离子体,不需要 ϵ,μ 这些宏观量予以描写,然而我们却可以形式地引进一个等效介电常数 ϵ,使麦氏方程组(9.15)式简化,给求解带来很大方便.下面对此作一说明,并同时导出等效介电常数(9.14)式.

求解(9.15)式时,方便的办法是将方程中包含的物理量(场量及电荷量)作傅氏分解,这在物理上的表示是任何复杂形态的电磁场总可看成各种单色场的叠加(这样作还具有实际价值;例如,研究等离子体中波的传播问题时,感兴趣的是每种给定频率 ω 的单色场的运动传播).此时,各种单色成分场量及电荷量的形式是

$$\boldsymbol{E}(\omega)=\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},\quad \boldsymbol{B}(\omega)=\boldsymbol{B}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},$$

$$\rho(\omega)=\rho(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},\quad \boldsymbol{j}(\omega)=\boldsymbol{j}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},$$

代入(9.15)式,就得到单色场的麦克斯韦方程组(相当于将(9.15)式中的 $\frac{\partial}{\partial t}\to-i\omega$)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\omega)=4\pi\rho(\omega),\quad \nabla\times\boldsymbol{E}(\omega)=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}(\omega),$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\omega)=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}(\omega)=\frac{-i\omega}{c}\boldsymbol{E}(\omega)+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\omega),$$

$$-i\omega\rho(\omega)+\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\omega)=0,\quad \boldsymbol{j}(\omega)=\sigma(\omega)\boldsymbol{E}(\omega).\quad(9.16)$$

(9.16)式的困难首先在于既有场量,又有电荷量.为了简化(9.16)式,最好首先设法消除电荷量 ρ,$\boldsymbol{j}$,只留下场量.一个方便的办法是从欧姆定律开始,消去 $\boldsymbol{j}(\omega)$.再将欧姆定律 $\boldsymbol{j}(\omega)=\sigma(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)$代入电荷守恒定律,得到

$$-i\omega\rho(\omega)=-\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\omega)=-\nabla\cdot(\sigma(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)).$$

代入(9.16)式第一式,即可在式中消去电荷量 $\rho(\omega)$,只留下场量 $\boldsymbol{E}(\omega)$,即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\omega)=\frac{4\pi}{i\omega}\nabla\cdot(\sigma(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)),$$

或者写成

$$\nabla\cdot\left[\left(1+i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}\right)\boldsymbol{E}(\omega)\right]=0.$$

把上式中 $\boldsymbol{E}(\omega)$ 前面的常数记为 $\varepsilon(\omega)$，即

$$\varepsilon(\omega)\equiv1+i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega},$$

则第一式可简化成

$$\nabla\cdot(\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega))=0.$$

同样，(9.16)式的第四式简化成

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\omega)=-\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega).$$

因此，整个单色场方程组(9.16)式简化成

$$\begin{gathered}\nabla\cdot(\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega))=0,\quad\nabla\times\boldsymbol{E}(\omega)=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}(\omega),\\\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\omega)=0,\quad\nabla\times\boldsymbol{B}(\omega)=-\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega).\end{gathered}\tag{9.17}$$

可见，引入 $\varepsilon(\omega)$ 就使原来的单色场麦氏方程组(9.16)大为简化，只留下场量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$，不再出现 $\rho,\boldsymbol{j}$. 求解(9.17)式时，也不必再附加上电荷守恒定律和欧姆定律.

为说明新引进的常数 $\varepsilon(\omega)$ 的物理意义，现作下面的类比：

设想有一个介电常数为 ε（磁导率 $\mu\simeq1$）的介质，且假定处处没有自由电荷（$\rho_f=\boldsymbol{j}_f=0$），则描写其中电磁场的运动应从有介质情况的麦氏方程组出发，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=0,\quad\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

若只讨论场的某一单色成分，即

$$\boldsymbol{E}(\omega)=\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},\quad\boldsymbol{B}(\omega)=\boldsymbol{B}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},$$

$$\boldsymbol{D}(\omega)=\boldsymbol{D}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega),\quad\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{B}(\omega),$$

则麦氏方程组化为以下单色场的方程组

$$\nabla\cdot(\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega))=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}(\omega)=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}(\omega),$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\omega)=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}(\omega)=-\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega).$$

将它和等离子体的单色场方程(9.17)式比较，形式显然相同．由于这个原因，(9.17)式中的系数 $\varepsilon(\omega)$ 称为完全电离等离子体的等效介电常数．由于

$$\varepsilon(\omega)=1+i\frac{4\pi}{\omega}\sigma(\omega),$$

可见要导出 $\varepsilon(\omega)$，首先需求出等离子体的单色电导率 $\sigma(\omega)$．

已经求出，在频率为 ω 的交变场作用下，自由电子的运动是受迫振动，

$$\boldsymbol{r}=\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m_0\omega^2}e^{-i\omega t}.$$

因此，自由电子的定向速度是

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{-ie}{m_0\omega}\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}=\frac{ie}{m_0\omega}\boldsymbol{E}.$$

因此，在电场作用下，等离子体中电流密度为

$$\boldsymbol{j}(\omega)=-N_ee\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{iN_ee^2}{m_0\omega}\boldsymbol{E}=\sigma(\omega)\boldsymbol{E}(\omega).$$

由此求得电导率为

$$\sigma(\omega)=\frac{iN_ee^2}{m_0\omega},$$

它是虚数．代入 $\varepsilon(\omega)$ 的表达式，就得到介电常数为

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi N_ee^2}{m_0\omega^2}=1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2},$$

这样就从另一角度重新导出(9.14)式．

由(9.14)式可见，完全电离等离子体(无场情况)的介电常数特点是：在频率 $\omega\geqslant\omega_P$ 范围内，$0\leqslant\varepsilon(\omega)\leqslant1$；而在 $\omega<\omega_P$ 时，$\varepsilon(\omega)<0$，成为负值．

与未充分电离等离子体相类似，为了说明 $\varepsilon<1$ 及 $\varepsilon<0$ 的物理含意，特别是为了由 ε 求出折射率 n(即求波的相速度)，还是应

从麦氏方程组出发(它决定场的运动,因而可由此找到波速),由此引出色散关系.

由单色场的麦氏方程组(9.17),可导出以下波动方程:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\omega)) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega). \tag{9.18}$$

现来考虑(9.18)式的平面波特解,即

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{9.19}$$

这仍不失其一般性. 因为对于给定频率 ω 的单色场,即 $\boldsymbol{E}(\omega)=\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$,尽管一般而言并不简单就是平面波形态,但是按傅氏理论仍可以将它看成是各种不同$\boldsymbol{k}$ 值的平面波叠加,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\omega) &= \boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k} \\ &= \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}d\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

这种分解成平面波的作法称为单色场的空间傅氏展开,于是可以仅研究每一个给定频率 ω 和波矢$\boldsymbol{k}$ 的平面波(9.19)式. 将(9.19)式代入(9.18)式得到

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times E(\omega)) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega) = 0, \tag{9.20}$$

(9.20)式也称为波动方程. 为了把它表示成最便于求解的简单的分量形式,最好把传播方向$\boldsymbol{k}$ 取为一个坐标轴的方向,例如 z 轴. 因而波矢$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$,则(9.20)式化为以下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} -c^2k^2+\omega^2\varepsilon(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & -c^2k^2+\omega^2\varepsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2\varepsilon(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \tag{9.21}$$

它是关于 $\boldsymbol{E}(\omega)$的三个分量 E_x, E_y, E_z 的线性齐次方程组,它的非零解的条件是系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} \omega^2\varepsilon(\omega)-c^2k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2\varepsilon(\omega)-c^2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2\varepsilon(\omega) \end{vmatrix} = 0. \tag{9.22}$$

(9.22)式称为色散方程，它给出 $k \sim \omega$ 关系(色散关系)，而需要求的波的相速度 u(因而折射率 n)也就包含在色散关系中. 当然，若要从(9.22)式定色散关系，首先必须知道 $\varepsilon(\omega)$ 的形式. 将(9.14)式给出的 $\varepsilon(\omega)$ 代入(9.22)式，则色散方程成为

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_P^2 - k^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \omega_P^2 - k^2c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_P^2 \end{vmatrix} = 0,$$

即得

$$(\omega^2 - \omega_P^2 - k^2c^2)^2(\omega^2 - \omega_P^2) = 0.$$

可见，由色散方程定出的色散关系不止一种. 令其中

$$\omega^2 - \omega_P^2 - c^2k^2 = 0.$$

即得到第一种色散关系，代入(9.21)式，得到相应的两个线性无关的独立解为

$$E_x \neq 0, \quad E_y = E_z = 0,$$

以及

$$E_y \neq 0, \quad E_x = E_z = 0.$$

由于 $\boldsymbol{E}(\omega)$ 沿波传播方向(z 轴)的投影 $E_z = 0$，所以这两个独立解代表两个电磁横波，偏振方向彼此垂直. 而其相速度 u 直接由色散关系定出为

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}},$$

因而折射率为

$$n = n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} = \sqrt{\varepsilon(\omega)}, \qquad (9.23)$$

这就是从色散关系找到的完全电离等离子体的色散公式. 因此得到：

1. 在 $\omega \geqslant \omega_P$ 范围内，n 是正的实数，$n < 1$，故光速 $u = \frac{c}{n} > c$，超过真空光速. $\omega \geqslant \omega_P$ 范围中折射率随频率的变化特征示于图

9.4 中.

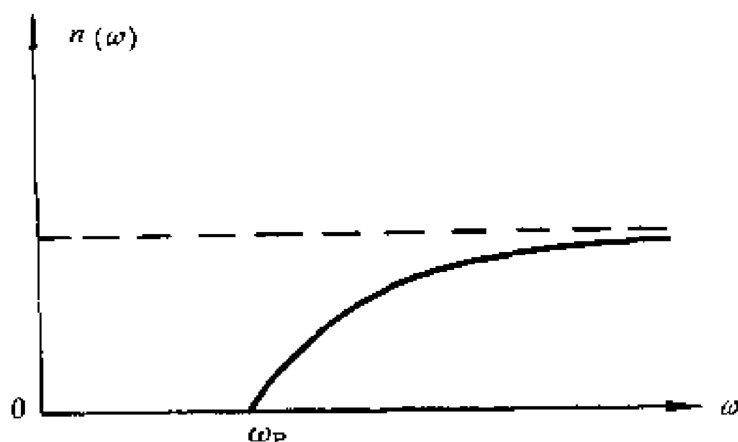


图 9.4

2. 在 $\omega<\omega_P$ 时，$\varepsilon<0$. 按照(9.23)式，n 成为虚数，其意义可直接由色散关系

$$\omega^2-\omega_P^2-c^2k^2=0$$

看出. 显然，这时 k 也是虚数，$k=i|k|$. 从而波矢是虚数波矢，$\boldsymbol{k}=i\ k|\boldsymbol{k}_0$代入平面波特解(9.19)式可见，这时得到的是指数衰减波，即这种频率范围($\omega\leqslant\omega_P$)的电磁波在等离子体中不能传播.

总之，在完全电离等离子体中，只允许频率 $\omega\geqslant\omega_P$ 的电磁波在其中传播，并且其相速度 $u=\frac{c}{n}>c$. 这说明在完全电离的(无场)等离子体中，不可能发生切仑柯夫电磁辐射过程；因为粒子速度 $v<c<u$①.

在色散方程中，再令第二个因子为零，即

$$\omega^2-\omega_P^2=0,$$

则得到第二种色散关系. 代入(9.21)式，得到相应的解为

$$E_x=E_y=0,\quad E_z\neq0.$$

这表示等离子体的纵振荡，因为 $\boldsymbol{E}(\omega)$只有纵向分量 E_z. 振荡频率

① 当然，由切仑柯夫效应产生其它模式的等离子体波仍是可能的.

由色散关系定出为 $\omega=\omega_p$. 对于讨论切仑柯夫效应而言,对这一振动模式的探讨意义不大.

9.3.3 稳态外磁场中的完全电离等离子体

如果完全电离的等离子体上施加一个稳定的静磁场,则将显著影响其中电磁波传播特性,并使切仑柯夫辐射重新成为可能. 从直观上可以了解,施加外磁场 $\boldsymbol{B}_0$,首先造成的影响是破坏了等离子体的空间各向同性,结果使描写等离子体电学性质的各物理量如电导率、等效介电常数等都成为张量,即电导率张量 $\boldsymbol{\sigma}$,介电张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 等. 由于电导率是张量,欧姆定律将表为

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}.$$

这表示 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向一般不同. 粗浅地说,这是由于磁场的存在,给电流附加了一个洛伦兹力,使得电流不可能严格地沿电场 $\boldsymbol{E}$ 方向流动(除非 $\boldsymbol{E}/\!/\boldsymbol{B}_0$,则此时 $\boldsymbol{j}/\!/\boldsymbol{E}$,因为这时不存在磁力). 由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 现在是张量,因而按照(9.14)式,等效介电常数也将代之以介电张量,即

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)=1+i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{\sigma}(\omega).$$

因此,只要导出了电导率张量 $\boldsymbol{\sigma}(\omega)$,即可定出 $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$.

磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 对等离子体电学性质的第二个影响是引进了新的特征频率. 在无场等离子体中,唯一的特征频率是等离子体振荡频率 ω_p. 假如现在只考虑自由电子(相当于只考虑高频现象,这是辐射问题所关心的. 对于高频现象,离子可视为静止),则这个新的特征频率即为电子绕磁场回旋的拉摩频率

$$\omega_L=\frac{eB_0}{m_0c}.$$

这一频率将出现在 $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$ 的表达式中.

限于篇幅,这里只列出等离子体的介电张量 $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$ 的推导结果,

$$\varepsilon(\omega)=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0\\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix},$$

其中

$$\varepsilon_1=1+\frac{\omega_P^2}{\omega_L^2-\omega^2},\quad \varepsilon_2=\frac{\omega_L}{\omega}\frac{\omega_P^2}{\omega_L^2-\omega^2},\quad \varepsilon_3=1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2},$$

而

$$\omega_P=\sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m_0}},\quad \omega_L=\frac{eB_0}{m_0c}.$$

由介电张量导出折射率公式，仍需借助于色散方程；由于$\varepsilon(\omega)$是张量，故波动方程(9.20)式应改为

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times E(\omega))+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\cdot\boldsymbol{E}(\omega)=0,$$

或者

$$\left[k^2\mathbf{I}-\boldsymbol{kk}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right]\cdot\boldsymbol{E}(\omega)=0. \qquad (9.24)$$

(9.24)式是关于E_x,E_y,E_z的线性齐次方程组，具有非零解的条件是系数行列式为零，即(上式中$\mathbf{I}$是单位张量)

$$\mathrm{Det}\left[k^2\mathbf{I}-\boldsymbol{kk}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right]=0, \qquad (9.25)$$

也可以记为

$$\mathrm{Det}\left[k^2\delta_{\alpha\beta}-k_\alpha k_\beta-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right]=0, \qquad (9.25')$$

(9.25)式或(9.25')式即为色散方程. 与无场情况的讨论方式完全相同，只是现在色散关系更为复杂(式中$\delta_{\alpha\beta}$为克洛尼格符号，$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, 当\ \alpha=\beta\\ 0, 当\ \alpha\neq\beta\end{cases}$).

推导折射率(相速)的公式也应从(9.25)式出发. 为了使(9.25)式有简便的形式，方便的办法是选取外场$\boldsymbol{B}_0$方向为某一坐标轴的方向，例如z轴. 把波矢$\boldsymbol{k}$方向的单位矢记为$\boldsymbol{k}$。再注意到$\frac{\omega}{k}$

$=u=\frac{c}{n}$，n 是折射率，则色散方程(9.25)式化为

$$\mathrm{Det}\left[\mathbf{I}-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_0-\frac{1}{n^2}\boldsymbol{\varepsilon}\right]=0.$$

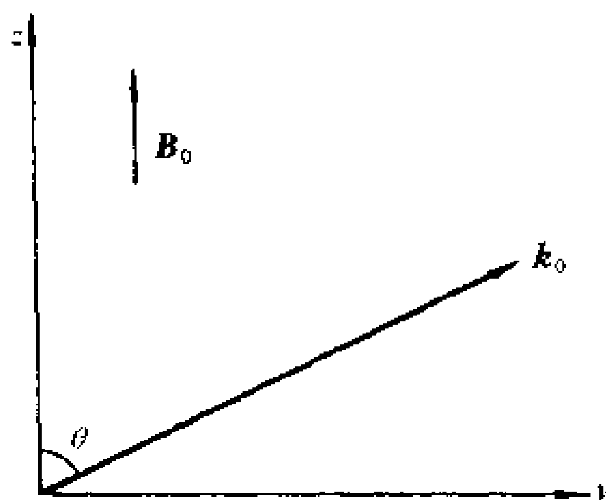


图 9.5

设传播方向$\boldsymbol{k}_0$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 方向(z 轴)夹角为 θ. 为了使上式有最简单的表示，可以选择坐标系，使$\boldsymbol{k}_0$ 在 yz 平面内(图 9.5)，则$\boldsymbol{k}_0$ 表为

$$\boldsymbol{k}_0=(0,\quad \sin\theta,\quad \cos\theta),$$

以及

$$\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ 0 & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta\end{pmatrix},$$

最后色散方程成为

$$\begin{vmatrix}1-\frac{\varepsilon_1}{n^2} & \frac{-i\varepsilon_2}{n^2} & 0\\ \frac{i\varepsilon_2}{n^2} & \cos^2\theta-\frac{\varepsilon_1}{n^2} & -\sin\theta\cos\theta\\ 0 & -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\frac{\varepsilon_3}{n^2}\end{vmatrix}=0.$$

由此可得

$$\operatorname{tg}^2\theta = -\frac{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_R}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_L}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_R}-\frac{1}{\varepsilon_L}\right)\right]}, \qquad (9.26)$$

其中

$$\varepsilon_R \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_L \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

而 $\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_P^2}{\omega_L^2 - \omega^2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\omega_L}{\omega}\frac{\omega_P^2}{\omega_L^2 - \omega^2}$, $\varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}$.

由(9.26)式可以找到折射率 $n = n(\omega, \theta)$. 由该式可见,对于给定的方向 θ 和频率 ω,折射率值不仅是一个. 对于给定的 θ, ω,可以传播两种不同的电磁波模式(也称为波型),即寻常波(O 波)和非常波(X 波). 两波的折射率为(见第一章的(1.63)式,详见 Bremmer, H. ,"Terrestial Radio Waves",p. 282,1949)

$$n_{O,X}^2 = 1 - [2V(1-V)]/\{2(1-V) - U\sin^2\theta \pm [U^2\sin^4\theta + 4U(1-V)^2\cos^2\theta]^{1/2}\}, \qquad (1.63)$$

其中

$$V = \left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2, \quad U = \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2, \quad \omega_P = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m_0}}, \quad \omega_L = \frac{eB}{m_0 c}.$$

并且 n_O 代表寻常波折射率,在(1.63)式分母中取正号;n_X 是非常波折射率,对应于分母中负号.

由(1.63)式可见,对于磁等离子体,在一定频率 ω 范围内,将有 $n > 1$,使得切仑柯夫辐射成为可能.

Kolomenskii(*Dokl. Akad. Nauk, SSSR*, **86**(6),1097,1956). 曾对这种切仑柯夫辐射作了具体计算,他仅限于考虑电子 $\boldsymbol{v} \,/\!/\, \boldsymbol{B}$ 的情况,这是实际中常常遇到的情况. 在这情况下,辐射方向和速度方向的夹角 θ_c 应当就是辐射方向和磁场方向的夹角,即 $\theta_c = \theta$. 他求得两种波型的辐射方向由以下公式表示:

$$\cos^2\theta_c^{O,X} = \frac{\omega^2}{2\beta^2\{(\omega^2-\omega_P^2)^3\beta^2 - \omega_L^2\omega^2[\omega^2\beta^2 + (1-\beta^2)\omega_P^2]\}} \times \{2(\omega^2-\omega_P^2)^2\beta^2 - \omega_L^2[2\beta^2\omega^2 + (1-\beta^2)\omega_P^2]$$

$$\pm \omega_P^2\omega_L\sqrt{[4(\omega^2-\omega_P^2)\beta^2+\omega_L^2(1-\beta^2)^2]}\}.$$
(9.27)

由(9.27)式以及条件 $0\leqslant\cos^2\theta_c^{O,X}\leqslant 1$，可以求得 O 波和 X 波辐射的频率范围分别是：

$$\omega<\omega_P \quad (\text{对于 O 波}) \tag{9.28}$$

$$\omega_P<\omega<[\omega_P^2+\omega_L^2]^{1/2} \quad (\text{对于 X 波}).$$

这里不要误认为在切仑柯夫效应下，O 波和 X 波将同时存在. 实际上，在上述条件下可以知道，存在一个临界场强 B_1；仅当磁场 $B<B_1$ 时，才发射 X 波，而当 $B>B_1$ 时，只辐射 O 波. B_1 由下式给出：若速度 $\beta<\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$B_1=8\pi N_e ec\beta/\sqrt{(1-\beta^2)};$$

若 $\beta>\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$B_1=4\pi N_e ec/(1-\beta^2). \tag{9.29}$$

因此，在相对论电子情况下($\beta\simeq 1$)，B_1 很大，总是满足条件 $B<B_1$，故只可能辐射 X 波. 其频率范围参见(9.28)式. 值得注意的是，对于磁等离子体，非相对论电子($\beta\ll 1$)也有可能产生切仑柯夫辐射.

9.3.4 中等电离程度的等离子体

这时中性原子密度和自由电子密度可以比较，$N\simeq N_e$. 这是介于未充分电离与完全电离之间的情况. 因此，求其等效介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 时，必须同时考虑原子中电子和自由电子对极化的贡献. 如果单位体积中全部原子的总电子数是 N，自由电子数是 N_e，则按照 §3.1，原子中电子对极化矢量的贡献为

$$\boldsymbol{P}_1=\frac{Ne^2}{m_0[(\omega_0^2-\omega^2)-i\omega\gamma]}\boldsymbol{E},$$

而按照 §3.2，自由电子对极化的贡献为

$$P_2 = -\frac{N_e e^2}{m_0 \omega^2} E.$$

因此，总的极化矢量应当是

$$P = P_1 + P_2 = \left\{ \frac{Ne^2}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma]} - \frac{N_e e^2}{m_0 \omega^2} \right\} E.$$

因此，介质的介电常数应为

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma]} - \frac{4\pi N_e e^2}{m_0 \omega^2}, \quad (9.30)$$

或者写成

$$\varepsilon(\omega) = \left\{ 1 + \frac{4\pi Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right\} + i\left\{ \frac{4\pi Ne^2\gamma\omega}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2] + \gamma^2\omega^2]} \right\}. \quad (9.31)$$

当 $N \gg N_e$ 时，(9.30)式或(9.31)式还原为(9.11)式；当 $N_e \gg N$ 时，还原为(9.14)式.

折射率由 $\varepsilon(\omega)$ 的实部决定，

$$n(\omega) \simeq \varepsilon'(\omega) = \sqrt{1 + \frac{4\pi Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{m_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}, \quad (9.32)$$

式中

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m_0}}.$$

由(9.32)式可见，只要 N_e 较小(因而 ω_P 较小)，使得 ω_P 显著小于固有频率 ω_0 时，则仍可在靠近 ω_0 的某一频段 $\omega \lesssim \omega_0$ 上使得介质折射率 $n(\omega) \geqslant 1$，从而使切仑柯夫过程成为可能，定量讨论从略.

§9.4 天体物理中的切仑柯夫辐射

9.4.1 夜空的可见光脉冲——大气中的切仑柯夫效应

与固体、液体介质相比，气体中的切仑柯夫现象很弱. 因气体

折射率 $n\simeq1$，故由(9.7)式可见，切仑柯夫辐射强度很低. 由(9.8)式可见，要求电子有更高的能量阈值. 此外，由于气体 $n\simeq1$，有 $\theta_c\simeq0$.

以海平面大气为例，$n\simeq1.00029$，故对宇宙线电子而言($\beta\simeq1$)，$\theta_{c\max}\simeq1.3°$，电子能量阈值 $E_{\min}=21\text{MeV}$，电子在单位路程上辐射的光子数 $\left(\frac{dN}{dl}\right)_{\beta=1}=0.3$ 个光子/cm(波长范围在 4000—5000 Å). 不妨和水的切仑柯夫辐射作一比较；对于水，$n=1.33$，$\theta_{c\max}=41°$，$E_{\min}=0.26\text{MeV}$，而 $\left(\frac{dN}{dl}\right)_{\beta=1}=250$ 个光子/cm.

考虑到高能宇宙线粒子(主要是电子)穿过大气时的切仑柯夫效应，可以部分地说明夜天的背景光来源. 当然，主要的光来自气辉，星光及其它的光源，切仑柯夫辐射只占很小比例，即为总的夜天光的 10^{-4}，没有什么重要性.

但是，当极高能的宇宙线粒子(包括高能 γ 射线)射进大气时，将产生广延大气簇射(例如，初始的 γ 光子产生电子对，电子对又通过韧致辐射产生次级 γ 光子……)，造成瞬时的高能粒子数的剧增. 这些高能粒子穿过大气时引起瞬时的切仑柯夫光脉冲. 用光电技术检测这一光脉冲，同时可利用核物理学中的快符合技术把光脉冲的产生与宇宙线事件联系起来. 目前这已成为 γ 射线天文学的一种观测手段(详见 Jelley，"Cerenkov Radiation and Its Application").

9.4.2 来自太阳黑子的射电发射

在§3.3 中曾提到，稳态外磁场中完全电离等离子体(磁等离子体)中有可能产生切仑柯夫效应，通常是在射电波段. 这可能是天体物理学中的重要射电辐射(详见 Jelley 的著作). 目前关于太阳的非热射电辐射过程，特别是关于与黑子事件相关联的射电发射，大体公认为有多种类型，有不同的发射机制. 一种可能性是把它归因于磁等离子体中的切仑柯夫效应. 这种射电辐射仅持续很短时间，量级仅几分钟. 另一特点是辐射频宽较窄，且在发射过程

中平均频率会从高频向低频漂移(例如,Pawsey and Smerd,"Solar radio emission",1953).

一种可能的解释是,在黑子处会产生电子束"喷嘴",喷嘴的方向可以和黑子磁场夹成任一角度.射出的电子将沿螺线运动离开黑子区域.这过程中就产生切仑柯夫辐射.由公式(1.63)式可见,介质折射率 n 在频率 $\omega \simeq \omega_P$ 或 $\omega \simeq \omega_L$ 时特别高,所以可以预料切仑柯夫辐射将在两个频带位置较强.由于电子喷束在离开黑子过程中,它所穿过的区域的磁场和电子密度都随高度而下降,因而 ω_P 和 ω_L 会随离开黑子的高度而下降,因此,当电子喷口不断上升时,辐射频率会由高频向低频漂移.

已知黑子处的磁场强度和电子密度,就可算出频率 ω_P 和 ω_L.它的量级和观测到的两个射电波频带吻合,而在地面测到的射电强度也和这种辐射机制的假定相合.就以频率为例,已知电子拉摩频率 $\nu_L = eB/2\pi m_0 c = 2.9 \times 10^6 B(\mathrm{Hz})$,$B$ 是以 Gs 为单位的磁场强度.一个大的黑子的场强量级为 5000Gs,小的黑子的场强约 50Gs,故相应的频率分别为 14,000MHz 和 140MHz.等离子体频率为

$$\nu_P = \left(\frac{N_e e^2}{\pi m_0} \right)^{1/2} = 9,000\sqrt{N_e} \quad (\mathrm{Hz}),$$

其中 N_e 是电子密度,其数值范围是 $10^{10}\mathrm{cm}^{-3}$(在 $1.006R_\odot$ 处)到 $10^6\mathrm{cm}^{-3}$(在 $2R_\odot$ 处),故相应的频率 ν_P 从 900—9MHz.适当调整 N_e,B 的数值,即可使两个频带的频率相差近两倍.这似乎可以说明,为什么黑子的射电发射中,总是观测到频率相差近两倍的两个频带.

§9.5 切仑柯夫谱线发射

已经指出,产生切仑柯夫辐射的条件是 $v \gg \frac{c}{n}$,可见在透明介质折射率 n_λ 大的波长位置 λ,切仑柯夫条件更易满足,预期该波长处辐射变强.由此定性分析易知,欲求切仑柯夫辐射谱,首先要求

色散曲线 $n_\lambda \sim \lambda$. 对于气体介质, $n_\lambda \sim \lambda$ 曲线的理论计算不十分困难,从而求出气体介质的切仑柯夫辐射谱分布. 结果是有趣的:当相对论电子穿行于稠密气体时,切仑柯夫效应产生的辐射将集中于紧邻原子(对于由原子组成之气体)或分子(对分子气体)的本征波长 λ_{lu} 近旁很窄的波段 $\Delta\lambda$ 内. 因此看上去很像原子或分子谱线发射而不像连续谱. 我们称之为"切仑柯夫发射线". 道理其实简单:由计算的气体色散曲线(图 9.6,图中给的是 $n_\lambda^2 \sim \lambda$ 曲线)可见,只在 $\lambda = \lambda_{lu} + \Delta\lambda$ 近邻处,才有 n_λ 显著大于 1. 当然,对于定向电子束,切仑柯夫线发射很弱. 这是由于在本征波长 λ_{lu} 附近,尽管折射率 n_λ 显著大于 1,但 n_λ 随波长 λ 急剧变化(见图 9.6),因而切仑柯夫辐射角 θ_c 也随 λ 急变($\cos\theta_c = \frac{1}{\beta n_\lambda}$),有限的辐射却分布在宽的角范围内,使沿任一固定方向的辐射几乎为零. 不过,在天体环境中,相对论电子常具各向同性速度分布. 因此 n_λ 随 λ 急剧变化引起的方向 θ_c 的弥散会因存在各种方向的相对论电子而得到补偿. 沿任一辐射方向强度将不会很弱.

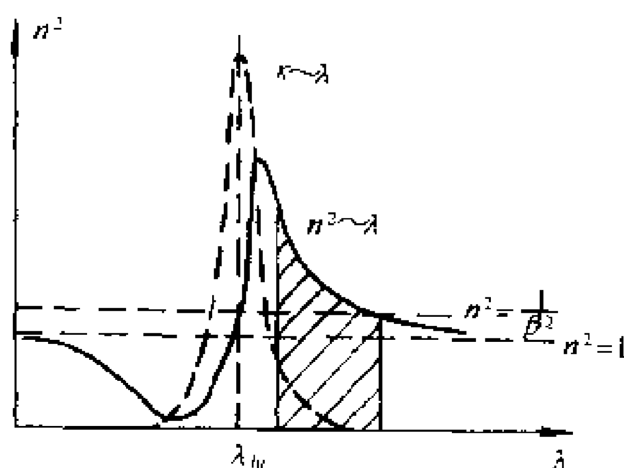


图 9.6　气体色散曲线 $n_\lambda^2 \sim \lambda$(图中实线)和气体消光系数 $\kappa_\lambda \sim \lambda$ 曲线(虚线)

切仑柯夫线辐射长期未受到重视,除了光很微弱,难以检测之外,另一原因来自理论考虑. 人们一直以为,固然气体折射率 n_λ 在本征波长 λ_{lu} 附近很大,但 λ_{lu} 处共振吸收(或者,消光系数 κ_λ)也达

到极大. 从而切仑柯夫辐射和气体线吸收在$\lambda \simeq \lambda_{lu}$的同一窄波段上发生了重叠,使辐射消失. 但是尤峻汉、程富华等("物理学报"29期,927,1980;*Phy. Rev.*,A,**34**,3015,1986)仔细计算了$\lambda \sim \lambda_{lu}$近旁气体折射率$n_\lambda$和消光系数$\kappa_\lambda$,发现两者随波长位移$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{lu}$的变化方式并不相同,不会出现发射和吸收相消现象. 以下推导表明,近似而言,在λ_{lu}附近,切仑柯夫发射系数J_λ^c和波长位移关系是$J_\lambda^c \propto \Delta\lambda^{-1}$(由$n_\lambda^2 \sim \lambda$特性决定),而消光系数$\kappa_\lambda \propto \Delta\lambda^{-2}$,即吸收随波长位移的下降远比发射快. 结果在$\Delta\lambda$较大的波长位置上(图9.6中阴影区域);切仑柯夫辐射不会完全被吸收. 计算表明,这一波段很窄,通常条件下宽度仅1—10 Å(对光学波段谱线). 但提醒读者,它不是严格意义下原子,分子发射线. 它终究比较宽,而且不是在λ_{lu}精确位置上,它已稍有红移(图9.6). 红移的原因就是大的线吸收.

以下计算显示(见图9.7最下方曲线),相对论电子产生的"切仑柯夫发射线"有三个明显特征:(1)"谱线"很宽(对$N_H \simeq 10^{16}$ cm^{-3}的稠密气体,Lyα线宽度高达1—10 Å);(2)"谱线"轮廓不对称. 对于稠密气体,谱线蓝边较陡,红边平坦下降(图9.7最下方轮廓即属此例);对稀薄气体,轮廓具有很好的对称性;(3)如前所述,"谱线"峰值位置并不精确位于λ_{lu}处,而是略有红移(仅约$\Delta z \sim 10^{-3}$). 这是一种新的红移机制,不妨称为"切仑柯夫线红移",以示与其它红移(如多普勒红移,引力红移,康普顿软化过程中的康普顿红移等)之不同.

徐克尊等人以放射性同位素^{90}Sr产生的β射线穿过钠蒸气及氧、溴等分子气体,从实验上确切证实了切仑柯夫发射线的存在. 他们利用快符合电子学技术在理论预期的切仑柯夫辐射方向和偏振方向上找到了这种特殊的发射线(徐克尊、杨炳忻等,*Phy. Lett.* **86** A 24,1981,*Phy*,*Rev.*,A,**40**,5411,1989).

这种新的谱线发射机制在天体物理中有潜在重要性,特别对活动星系核和太阳耀斑这样的高能天体,由于存在丰富的相对论电子和密度较高的气体云,具备了产生切仑柯夫线辐射的充分条

件，因此特别值得注意.

现在推导切仑柯夫线辐射的基本公式. 在第三章(辐射转移)中已说过，对于一个简单的厚度是 L 的均匀平面平行层介质，若其发射系数是 J_λ，吸收系数是 k_λ，则从表面出射的单色光强度为 $I_\lambda=\frac{J_\lambda}{k_\lambda}(1-e^{-k_\lambda L})$. 即出射光强 I_λ 取决于介质的吸收 k_λ(分母上)和发射 J_λ(分子上)两者的竞争. 所以，欲求出射光强，需先计算介质的 J_λ 和 k_λ. 这对切仑柯夫这一特定辐射机制自然也适用. 而对切仑柯夫辐射，寻找 J_λ，k_λ 的任务简单归为计算气体折射率(见本节开始的定性分析). 以下推导中，一律采用 c. g. s 单位制，特别是公式中的波长单位将不是 Å，而是 cm(请读者应用公式时特别当心波长单位).

1. 折射率 n_λ 和消光系数 κ_λ

由于是在紧邻本征频率附近($\nu\sim\nu_{lu}$ 或 $\lambda\sim\lambda_{lu}$)作折射率计算，故需采用严格的洛伦兹公式，即

$$\frac{\tilde{n}_\nu^2-1}{\tilde{n}_\nu^2+2}=\frac{4\pi}{3}N\alpha, \tag{9.33}$$

其中

$$\tilde{n}_\nu=n_\nu-i\kappa_\nu \tag{9.34}$$

为气体复折射率. 其实部 n_ν 即气体折射率，虚部为气体消光系数 κ_ν，N 是气体数密度，α 是气体每个原子的极化率(即原子极化公式 $\boldsymbol{p}=\alpha\boldsymbol{E}$ 中系数). 当原子布居在各种可能态上(能级 a 的数密度记为 N_a)，则式中的 $N\alpha$ 将用对所有的能级对(a,b)的双重求和来替代，即代以

$$N\alpha=\sum_a N_a\alpha_a=\sum_a N_a\sum_{b\neq a}\frac{e^2}{2\pi m_0}\frac{f_{ab}}{2\pi(\nu_{ab}^2-\nu^2)+i\Gamma_{ab}\nu}. \tag{9.35}$$

上式中已采用了量子理论中得到的能级 a 的原子极化率公式，即

$$\alpha(\omega)=\frac{e^2}{m_0}\sum_{b\neq a}\frac{f_{ab}}{(\omega_{ab}^2-\omega^2)+i\Gamma_{ab}\omega}, \tag{9.36}$$

e, m_0 是电子电荷与质量，f_{ab} 和 Γ_{ab} 分别是频率是 ω_{ab} 的原子本征频率发射线的振子强度和量子阻尼常数. 由于我们只是在一条特定的本征频率 ω_{lu} 近旁 $\omega \simeq \omega_{lu}$ 求折射率(脚标 l 和 u 分别表示与 ω_{lu} 对应的原子的下能级和上能级，以下同)，故(9.35)式求和中实际只需保留最大的两项，从而(9.35)式简化为

$$N\alpha \simeq N_l \alpha_{lu} + N_u \alpha_{ul}, \tag{9.37}$$

其中

$$\alpha_{lu} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{m_0} f_{lu} / [2\pi(\nu_{lu}^2 - \nu^2) + i\Gamma_{lu}\nu]. \tag{9.38}$$

只需将(9.38)式中脚标 l, u 对调，即得 α_{ul}，以下 f_{lu} 和 f_{ul} 分别对应于能级为 (l, u) 的吸收振子强度和发射振子强度. 第二章给出，两者关系为 $g_u f_{lu} = -g_l f_{ul}$. g_l, g_u 分别是下能级和上能级的简并度. 吸收振子强度可用 $u \to l$ 自发跃迁概率 A_{ul} 表示(第二章)：

$$f_{ul} = \frac{m_0 c^3}{8\pi^2 e^2 \nu_{lu}^2} (g_u / g_l) A_{ul},$$

而(9.38)中量子阻尼常数 Γ_{lu} 也可用 A 系数表为

$$\Gamma_{lu} = \Gamma_u + \Gamma_l = \sum_{k(<u)} A_{uk} + \sum_{k(<l)} A_{lk}.$$

利用这些关系，方程(9.33)成为

$$\frac{\tilde{n}_\nu^2 - 1}{\tilde{n}_\nu^2 + 2} = \frac{b}{Z + ig}, \tag{9.39}$$

其中

$$\begin{aligned} b &\equiv \frac{c^3}{12\pi^2} \nu_{lu}^{-2} A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u} \right], \\ Z &\equiv 2\pi(\nu_{lu}^2 - \nu^2), \quad g \equiv \Gamma_{lu}\nu. \end{aligned} \tag{9.40}$$

由(9.39)和(9.40)即可求得气体折射率和消光系数如下：

$$\begin{aligned} n_\nu^2 &= [(A^2 + 9b^2 g^2)^{½} + A] / 2B, \\ \kappa_\nu^2 &= [(A^2 + 9b^2 g^2)^{½} - A] / 2B, \\ A &\equiv (z + 2b)(z - b) + g^2, \\ B &\equiv (z - b)^2 + g^2. \end{aligned} \tag{9.41}$$

式中

(9.41)式即所求 $n_{2\nu} \sim \nu$ 色散曲线公式，不难由它完成数值计

算. 但因主要兴趣是在 $\nu \simeq \nu_{lu}$ 近邻的计算. 为此，可将(9.41)式化简为 $\nu \simeq \nu_{lu}$ 近邻处的近似解析公式. 为便于和观测比较，最好将(9.41)式中的频率变量代以波长，$\nu \to \lambda$. 令 $\Delta\lambda \equiv \lambda - \lambda_{lu}$ 代表波长位移，并令

$$y \equiv \frac{\lambda - \lambda_{lu}}{\lambda_{lu}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{lu}}, \tag{9.42}$$

y 代表相对波长位移. 由于只关心 $\lambda \simeq \lambda_{lu}$ 近邻的计算，$y \ll 1$，故 y 成为理论分析中一个很方便的无量纲的小量(例如用 y 做级数展开). 将(9.41)式中的 $\nu \to y$，即 $\nu = c/\lambda = c\lambda_{lu}^{-1}(1+y)^{-1}$，以及 $\nu_{lu} = c\lambda_{lu}^{-1}$. 将此代入(9.39)及(9.40). 并只保留小量 y 的最低阶项，即得

$$b = \frac{c}{12\pi^2}\lambda_{lu}^2 A_{ul} g_u \left[\frac{N_u}{g_u} - \frac{N_l}{g_l}\right],$$

$$z = 4\pi c^2 \lambda_{lu}^{-2} y, \quad g = c\lambda_{lu}^{-1}\Gamma_{lu}. \tag{9.43}$$

可见 b, g, z 三者中只有 z 与波长位移变量 y 有关. 由于切仑柯夫线发射并不精确位于 $\lambda = \lambda_{lu}$ 位置，而是略有红移，波长位移 y 不会是无限小量，即 $y \not\to 0$(见本节开始的定性分析). 因此，在整个 y 的有效变化范围内，总有

$$g \ll z, \quad b \ll z. \tag{9.44}$$

现举例说明，对氢原子的 Lyα 线，$\lambda_\alpha = \lambda_{21} = 1.216 \times 10^{-5}$cm，$\Gamma_{21} = A_{21} = 6.25 \times 10^8 \mathrm{s}^{-1}$.，代入(9.43)式可知，只要 $\Delta\lambda \gtrsim 2.0 \times 10^{-4}$ Å，即 $y \gtrsim 10^{-7}$，必有 $g \ll z$. 关于(9.44)第二个不等式，注意通常条件下，总有 $N_2 \ll N_1 \simeq N$，故 b 中 $\left[\frac{N_1}{g_1} - \frac{N_2}{g_2}\right] \simeq \frac{1}{g_1}N$. 因此即使 N 值高达 $N \simeq 10^{17}\mathrm{cm}^{-3}$，只要 $\Delta\lambda \gtrsim 1.1 \times 10^{-3}$ Å，即 $y \gtrsim 10^{-6}$，就必有 $b \ll z$. 更小的气体密度 N 甚至给出更低的 $\Delta\lambda$ 下限值，即可保证 $b \ll z$ 成立. 因此在切仑柯夫 Lyα 线宽($\Delta\lambda \sim 1-10$ Å)的实际范围内，不等式(9.44)式总是对的. 对其它发射线，(9.44)也可按类似的估算证实其可靠性. 因此在严格公式(9.41)式中，只需近似保留 g/z 和 b/z 两小量的第一阶，就得到简化的近似公式

$$n_\lambda^2 - 1 \simeq 3b/z,$$

$$\kappa_\lambda \simeq \frac{3}{2}(b/z)(g/z). \qquad (9.45)$$

将(9.43)式代入上式，最终得到所需折射率 n_λ 和消光系数 κ_λ 的简化近似公式(在 $\lambda \simeq \lambda_{lu}$ 近邻中有效，但 $y \nrightarrow 0$. 在 $y \simeq 0$ 处，近似公式不适用，不过此处切仑柯夫辐射已消失)：

$$n_\lambda^2 - 1 = \frac{1}{16\pi^3 c}\lambda_{lu}^4 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right] y^{-1}, \qquad (9.46)$$

$$\kappa_\lambda = \frac{1}{128\pi^4 c^2}\lambda_{lu}^5 \Gamma_{lu} A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right] y^{-2}.$$

由基本公式(9.46)可见，折射率 n_λ 按 $(n_\lambda^2-1)\propto y^{-1}\propto \Delta\lambda^{-1}$ 缓慢下降. 以下看到，切仑柯夫谱发射系数 J_λ^c 近似按 $J_\lambda^c \propto (n_\lambda^2-1)$ 变化，故有 $J_\lambda^c \propto \Delta\lambda^{-1}$. 然而消光却按 $\kappa_\lambda \propto y^{-2} \propto \Delta\lambda^{-2}$ 变化，下降很陡. 从而在 $\Delta\lambda$ 稍大地方，在 $\lambda \simeq \lambda_{lu}$ 邻域会产生"净"的切仑柯夫"发射线".

2. 切仑柯夫谱线发射系数 $J_\lambda^c(J_\nu^c)$，谱线极限宽度 $\Delta\lambda_{\lim}(y_{\lim})$

已知色散曲线 n_λ-λ，即可导出切仑柯夫出射谱形. 按(9.7)式，速度为 $\beta = V/c$ 的相对论电子在频率 ν-$\nu+d\nu$ 间隔内的切仑柯夫辐射谱功率为 $P_\nu d\nu = \left(\frac{4\pi^2 e^2 \beta}{c}\nu\right)\left(1 - \frac{1}{n_\nu^2\beta^2}\right)d\nu$. 若相对论电子在能量间隔 γ-$\gamma+d\gamma$ 中数密度是 $N(\gamma)d\gamma$，($\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{m_0c^2}$ 为洛伦兹因子，物理上代表电子的无量纲能量值). 这些电子在 ν-$\nu+d\nu$ 中贡献的辐射功率总共是 $N(\gamma)d\gamma P_\nu d\nu$. 对于各向同性相对论电子速度分布而言(这是常有的天体物理环境)，切仑柯夫辐射也是各向同性的，单个电子切仑柯夫确定的角分布会被电子速度的各向同性分布所补偿，因此单位体积中沿单位立体角切仑柯夫谱发射系数当为

$$J_\nu^c d\nu = \frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} N(\gamma)d\gamma P_\nu d\nu$$

$$= \frac{\pi e^2}{c}\nu d\nu \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} N(\gamma)d\gamma \beta\left[1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right], \qquad (9.47)$$

其中 γ_1, γ_2 是相对论电子能谱上、下限. 对于相对论电子, $\beta \simeq 1, \gamma \gg 1$, 故 $\beta^{-2} \simeq 1 + \gamma^{-2}, \beta \simeq 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2}$, 注意实际有效发射频段上, 折射率 n 并不远离 1, $n \gtrsim 1$ (见(9.41)式), 因此得

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} N(\gamma)\left[1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right]\beta d\gamma \simeq \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} (n^2 - 1 - \gamma^{-2}) N(\gamma) d\gamma$$

$$\simeq (n^2 - 1 - \gamma_c^{-2}) N_e,$$

其中 N_e 是相对论电子数密度, $N_e = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} N(\gamma) d\gamma$, γ_c 则是给定源中相对论电子的典型能量值(或特征能量值). 其定义是

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma^{-2} N(\gamma) d\gamma \equiv \gamma_c^{-2} N_e, \qquad (9.48)$$

显见 $\gamma_1 < \gamma_c < \gamma_2$, (9.47)式成为

$$J_\nu^c d\nu \simeq \frac{\pi e^2}{c} N_e \nu (n^2 - 1 - \gamma_c^{-2}) d\nu. \qquad (9.49)$$

将 ν 换成波长 λ 或 y, 有 $J_\nu^c d\nu = J_\lambda^c d\lambda = J_y^c dy$, 以及 $dy \equiv \lambda_{lu}^{-1} d\lambda = \lambda_{lu}^{-1}(-c\nu^{-2} d\nu)$, 故(9.49)成为

$$J_y^c dy = \pi c e^2 N_e \lambda_{lu}^{-2} (n^2 - 1 - \gamma_c^{-2}) dy. \qquad (9.50)$$

令(9.50)中因子 $(n^2 - 1 - \gamma_c^{-2}) = 0$, 并代入(9.46)式的折射率 n_λ 表示式, 即导出切仑柯夫线的极限宽度 $\Delta\lambda_{\rm lim}^c$ (或 $y_{\rm lim}^c \equiv \Delta\lambda_{\rm lim}^c / \lambda_{lu}$), 得到

$$y_{\rm lim}^c = C_0 \gamma_c^2 = \frac{1}{16\pi^3 c} \lambda_{lu}^4 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right] \gamma_c^2, \qquad (9.51)$$

其中常数

$$C_0 \equiv \frac{1}{16\pi^3 c} \lambda_{lu}^4 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right], \qquad (9.52)$$

将(9.51), (9.52)代入(9.50)式, 最终得到切仑柯夫谱发射系数的解析表示

$$J_y^c dy = N_e C_1 (y^{-1} - y_{\rm lim}^{-1}) dy, \qquad (9.53)$$

其中

$$C_1 \equiv \frac{e^2}{16\pi^2} \lambda_{lu}^2 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right], \qquad (9.54)$$

显见. 当 $y=y^c_{lim}$ 时，发射为零，$J^c_y=0$. 但对小的波长位移 $\Delta\lambda$，$y\ll y^c_{lim}$，近似有 $J^c_y dy\propto y^{-1}$. 即 J_y 随波长位移按 $\Delta\lambda^{-1}$ 方式缓慢下降.

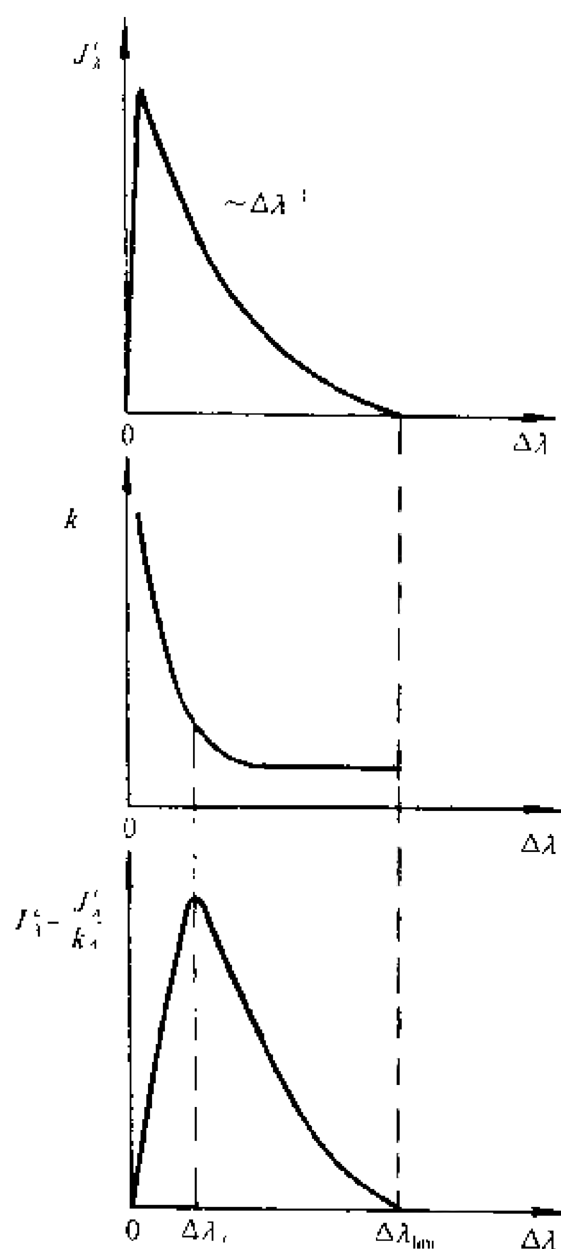


图 9.7　切仑柯夫线谱发射系数 J^c_λ，吸收系数 k_λ 及光厚情况下，切仑柯夫发射线的表面出射强度 I^c_λ

从(9.53)，(9.54)式可见，切仑柯夫线辐射与通常自发跃迁谱线有一重要区别：前者发射系数并不取决于上能级粒子数布居 N_u，而是由粒子数差 $\frac{N_l}{g_l}-\frac{N_u}{g_u}$ 决定. 通常条件下，下能级粒子数总远大于上能级，$N_l\gg N_u$，故近似言，切仑柯夫线发射正比于下能级粒子数 N_l，$J^c_y\propto N_l$. 这意味着，甚至在很低温度下，也能产生切仑柯夫线发射（只要有相对论电子穿过气体）. 在具体应用时，请读者注意 $J^c_y\propto N_l$ 这一特点.

谱发射系数 J^c_λ 与波长 λ 的关系（也就是不考虑气体吸收时的切仑柯夫发射线的原始谱形轮廓）由图 9.7 最上方第一条曲线表示. 严格的数值计算采用原始公式(9.43)，(9.45)和(9.47)式. 但如果略去 $\Delta\lambda\simeq0$ 的无关紧要波段，即 $\Delta\lambda\nrightarrow0$ 时，用近似解析公式(9.53)计算 $J^c_y\sim\lambda$ 已经足够好，所以在

$\Delta\lambda$ 很大范围中有 $J_y^c \sim \Delta\lambda^{-1}$，随 $\Delta\lambda$ 缓慢地下降.

3. 气体吸收系数 k_λ

对于光学厚气体，已指出，出射强度 I_λ 是由发射 J_y^c 和吸收 k_λ 竞争结果决定. 因此，还必须考虑气体在 $\lambda \simeq \lambda_{lu}$ 附近的吸收. 对于没有尘埃的简单情况，在可见光波段，在 $\lambda \simeq \lambda_{lu}$ 近旁重要吸收只有两种，它们对切仑柯夫发射线强度有影响. 其一是线吸收 k_1，它只发生在原子谱线紧邻. 其二是光致电离吸收 k_2（简称光电吸收），它虽是一种连续谱吸收，但对 $\lambda \gtrsim \lambda_{lu}$ 的切仑柯夫谱线的吸收很重要，特别对稠密气体，不可略去（相比之下，在光学波段，另一种连续谱吸收——自由-自由吸收 k_{ff} 就非常弱，$k_{ff} \ll k_2 \equiv k_{bf}$，可不考虑）. 故总吸收系数是

$$k = k_1 + k_2 = k_1 + k_{bf}, \tag{9.55}$$

k_1 可根据熟知的分子光学公式 $k_1 = \dfrac{4\pi}{\lambda}\kappa_\lambda = \dfrac{4\pi}{\lambda_{lu}}(1-y)\kappa_\lambda \simeq (4\pi/\lambda_{lu})\kappa_\lambda$ 计算，利用(9.46)式并只保留小量 y 的最低阶，即得

$$k_1 = \frac{1}{32\pi^3c^2}\lambda_{lu}^4\Gamma_{lu}A_{ul}g_u\left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right]y^{-2} = C_2y^{-2}, \tag{9.56}$$

其中

$$C_2 \equiv \frac{1}{32\pi^3c^2}\lambda_{lu}^4\Gamma_{lu}A_{ul}g_u\left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right]. \tag{9.56'}$$

由此可知线共振吸收 $k_1 \propto \Delta\lambda^{-2}$，随波长位移 $\lambda - \lambda_{lu}$ 很陡地下降.

其实，(9.56)式给出的 k_1 就是熟知的线吸收（共振吸收）公式，读者可由第三章给出的公式即 $k_\nu = \dfrac{c^2N_l}{8\pi\nu^2}\dfrac{g_u}{g_l} \times \left[1 - \dfrac{g_lN_u}{g_uN_l}\right]A_{ul}\varphi_{ul}(\nu)$ 重新独立导出(9.56)式，只要取轮廓因子 $\varphi_{ul}(\nu)$ 为洛伦兹形式即可：

$$\varphi_{ul}(\nu) = \frac{\Gamma_{lu}/4\pi^2}{(\nu - \nu_{lu})^2 + (\Gamma_{lu}/4\pi)^2} \simeq \frac{\Gamma_{lu}}{4\pi^2(\nu - \nu_{lu})^2}.$$

光电吸收系数 $k_2 \equiv k_{bf}$ 为 $k_2 = \sum_s N_s\sigma_s$，求和包括了原子所有的激发态能级 s，只要这些激发态的电离能 I_s 小于入射光子能量

$h\nu$ 即可，$I_s \leq h\nu$. 注意天体物理等离子体中丰度最高，因而最重要的光学波段光电吸收原子是氢原子 H^0，在计算 k_2 时，只需考虑氢吸收就足够了（详细计算也至多计及氦）. 氢原子光致电离截面为 $\sigma_s = 2.8 \times 10^{29} \nu^{-3} s^{-5}$（对激发态能级 s），或者

$$\sigma_s = 1.04 \times 10^{-2} s^{-5} \lambda_{lu}^3 (1+y)^3$$
$$\simeq 1.04 \times 10^{-2} s^{-5} \lambda_{lu}^3,$$

λ_{lu}的单位是 cm，因此

$$k_2 = 1.04 \times 10^{-2} \lambda_{lu}^3 \sum_{s \geq p} N_{H^0,s} s^{-5}, \tag{9.57}$$

其中求和 $s \geq p$ 中的 p 代表氢原子的最低光致电离能级主量子数.

由(9.56)和(9.57)式可见，线吸收 $k_1 \propto y^{-2}$，随波长位移 y 的增加快速减少，从而只在 λ_{lu} 紧邻处非常窄的波段内有效. 而光电吸收 k_2 几乎与波长位移 $\Delta\lambda$ 无关，近似常量. 因此可知，产生"切仑柯夫红移"的原因是线吸收. 图 9.7 中第二条曲线表示了吸收系数 $k_\lambda = k_1 + k_2$ 随 $\Delta\lambda$ 的变化.

4. 切仑柯夫出射谱强度 I_λ^c（或 I_y^c），谱线轮廓

将已求出的谱发射系数 J_λ^c 和气体吸收系数 k_λ 代入辐射转移方程，有

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\left[\frac{I^c(\nu,x)}{n_\nu^2}\right] = S_\nu - \frac{I^c(\nu,x)}{n_\nu^2}, \tag{9.58}$$

其中源函数 $S_\nu \equiv J_\nu^c / n_\nu^2 k_\nu$，由此可求出出射谱强度 I_ν^c，用波长 λ 代替 ν，对于厚 L 的均匀平面平行发光层气体，出射谱强度为

$$I_\lambda^c = n_\lambda^2 S_\lambda (1 - e^{-\tau_\lambda}) = \frac{J_\lambda^c}{k_\lambda}(1 - e^{k_\lambda L}), \tag{9.59}$$

在光学薄时，$k_\lambda L \ll 1$，有 $I_\lambda^c \simeq J_\lambda^c L$. 但光学厚情况切仑柯夫线辐射会变得重要（见后），而且像类星体、太阳耀斑区这些高能天体的宽发射线区气体常为稠密气体区，更近光厚情况. 当光学厚时，$k_\lambda L \gg 1$，(9.59)式简化成

$$I_\lambda^c \simeq J_\lambda^c / k_\lambda, \tag{9.60}$$

式中 J_λ^c，$k_\lambda = k_1 + k_2$ 已分别由(9.53)，(9.56)和(9.57)式给出. 这

些解析公式中用 $y \equiv \Delta\lambda/\lambda_{lu}$ 做变量，因而光厚公式(9.60)式(对均匀层)表为

$$
\begin{aligned}
I_y^c &= \frac{J_y^c}{k_1 + k_2} \\
&= \frac{C_1 N_e (y^{-1} - y_{\lim}^{c\ -1})}{C_2 y^{-2} + k_2},
\end{aligned}
\tag{9.61}
$$

式中 k_2 由(9.57)式给出，C_1，C_2 表示式见(9.54)，(9.56)式. $y_{\lim}^c = C_0 \gamma_c^2$ 中之 C_0 由(9.52)给出.

读者从(9.61)看到一个初觉意外的事实，对于光学厚气体，切仑柯夫出射强度 I_y^c 与气体密度几乎无关！原因是发射 J_y^c 和吸收 $k_y = k_1 + k_2$ 都正比于密度 N(见 C_1，C_2，k_2 的表达式).

为了方便，现将有关的系数重列如下：

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{16\pi^3 c} \lambda_{lu}^4 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right] \\
&= 6.72 \times 10^{-14} \lambda_{lu}^4 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right], \\
C_1 &= \frac{e^2}{16\pi^2} \lambda_{lu}^2 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right] \\
&= 1.46 \times 10^{-21} \lambda_{lu}^2 A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right], \\
C_2 &= \frac{1}{32\pi^3 c^2} \lambda_{lu}^4 A_{ul} g_u \Gamma_{lu} \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right] \\
&= 1.12 \times 10^{-24} \lambda_{lu}^4 \Gamma_u A_{ul} g_u \left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right], \\
k_2 &= 1.04 \times 10^{-2} \lambda_{lu}^3 \sum_{s \geqslant p} N_{\mathrm{H}^0,s} s^{-5}.
\end{aligned}
\tag{9.62}
$$

但通常物理条件下，至少对低能级，总有 $N_1 \gg N_2 \gg N_3 \cdots$，或 $N_l \gg N_u$. 因此 $\left[\frac{N_l}{g_l} - \frac{N_u}{g_u}\right] \simeq N_l/g_l$，以及 $\sum_{s \geqslant p} N s^{-5} \simeq N_{\mathrm{H}^0,p} p^{-5}$ (这表示只保留光致电离求和中氢原子最低激发态对光致电离的贡献). 由此(9.62)式简化为

$$C_0 \simeq 6.72 \times 10^{-14}\lambda_{lu}^4 A_{ul}\frac{g_u}{g_l}NR_l,$$

$$C_1 \simeq 1.46 \times 10^{-21}\lambda_{lu}^2 A_{ul}\frac{g_u}{g_l}NR_l, \tag{9.63}$$

$$C_2 \simeq 1.12 \times 10^{-24}\lambda_{lu}^4 A_{ul}\Gamma_{ul}\frac{g_u}{g_l}NR_l,$$

$$k_2 \simeq 1.04 \times 10^{-2}\lambda_{lu}^3 N_{H^0}R_p p^{-5}.$$

注意式中 λ_{lu}的单位是 cm，而不是惯用的Å．(9.63)式中$R_l \equiv N_l/N$代表有关的原子(离子)下能级 l 上的原子相对布居数. N 是该气体中该品种原子(离子)的数密度，并且总有 $R_1 \simeq 1$(即绝大部分该品种原子处于基态 $l=1$)，以及 $R_1 \gg R_2 \gg R_3 \cdots$，对于 Mg^+的切仑柯夫线，式中的 N 就代表 $N(Mg^+)$，讨论 Fe^+的线辐射，则式中的数密度即为 $N(Fe^+)$，等等. (9.63)式最后的 k_2 式中 $R_p \equiv N_{H^0 p}/N_{H^0}$是氢原子 H^0 在最低光电离能级 p 上的相对布居数.

最后，将(9.61)式中的 I_y^c 换成以波长 λ 为变量以便和观测比较，只需利用 $I_y^c dy = I_\lambda^c d\lambda$ 即可作换算：

$$I_\lambda^c = \frac{1}{\lambda_{lu}}I_y^c, \tag{9.64}$$

若 I_λ^c 采用习惯单位($erg \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1} \cdot sr^{-1} \cdot Å^{-1}$)，式中 λ_{lu}仍以 cm 为单位，则(9.64)应写为 $I_\lambda^c = \frac{10^{-8}}{\lambda_{lu}}I_y^c$.

利用(9.61)，(9.62)，(9.64)式计算的光学厚情况下切仑柯夫谱线轮廓表示于图 9.7 中最下方曲线(I_λ^c-$\Delta\lambda$ 曲线). 请读者注意，尽管导出(9.61)式时，利用了解析公式(9.53)，(9.56)，(9.57)，这些公式又只在条件(9.44)式下成立(即 $g \ll z, b \ll z$)，这条件要求相对波长位移 y 不能无限小(否则 $J_y^c \propto y^{-1} \to \infty, k_1 \propto y^{-2} \to \infty$，都发散，显然不合理)，然而导出的公式(9.61)却可安全地推广到 $y \to 0$ 而不发散，特别 $y=0$ 时有 $I_y^c=0$. 因此，该强度公式在整个切仑柯夫线发射波段$(0, y_{lim}^c)$上都适用.

从图 9.7 下方 I_λ^c-$\Delta\lambda$ 曲线可见，切仑柯夫发射线较宽，轮廓不对称，并且谱线峰不在 $\lambda=\lambda_{lu}$精确位置上，发生了微小的“切仑柯

夫红移".

上面的强度公式都是对均匀发光气体层导出的，不适用于非均匀气体. 对不均匀层，辐射转移方程(9.58)的解不再是(9.59)，而应为

$$\frac{I_\lambda^c}{n_\lambda^2}=\int_0^{\tau_\lambda(L)}e^{-\tau_\lambda}\left(\frac{J_\lambda^c}{n_\lambda^2 k_\lambda}\right)d\tau_\lambda.$$

由于在切仑柯夫线发射的有效波长范围中($y\neq0$)，实际气体折射率很接近 1，$n_\lambda\simeq1$，故上式简化成

$$I_\lambda^c=\int_0^{\tau_\lambda(L)}e^{-\tau_\lambda}\left(\frac{J_\lambda^c}{k_\lambda}\right)d\tau_\lambda \qquad (9.65)$$

由于气体介质不均匀，因子(J_λ^c/k_λ)不能提出积分号外(因为该比值随位置 s 而变化，$J_\lambda^c\propto N_l\propto N_l(s)$，$k_\lambda\simeq k_2\propto N_{H^0}=N_{H^0}(s)$). 但是提醒读者，对中性氢(H Ⅰ)谱线是个例外. 均匀层公式(9.59)，(9.60)，(9.61)都对，而不问气体氢密度是否均匀分布，理由是(9.65)式应用于 H Ⅰ 线时，尽管 $J_\lambda^c\propto N_{H^0 l}(s)$，而 $k_\lambda\simeq k_2\propto N_{H^0}(s)$，但 $N_{H^0 l}(s)$和 $N_{H^0}(s)$随 s 变化方式近似相同(若不考虑温度的微小变化)，因而比值$(J_\lambda^c/k_\lambda)_{H^0}$和位置 s 无关，照样可提出到积分号外，重新得到(9.59)式.

将(9.65)式重新写一下，即为

$$I_\lambda^c(L)=\int_0^L J_\lambda^c(s)e^{-\int_0^s k_\lambda(s')ds'}ds. \qquad (9.66)$$

如果该品种原子(离子，例如 Mg^+，Fe^+)实际只分布于区间(S_1，S_2)中，$S'=S_2-S_1<L$，其中 $J_\lambda^c(s)\neq0$，$k_\lambda(s)\neq0$，则(9.66)式应写为

$$I_\lambda^c(L)=\int_{S_1}^{S_2}J_\lambda^c(s)e^{-\int_0^s k_\lambda(s')ds'}ds, \qquad (9.67)$$

此即不均匀情况下的出射强度公式，只要知道沿途各点 s 的$J_\lambda^c(s)$和 $k_\lambda(s)$，即可由数值计算完成此积分. 但是在某些情况下，半定量估值 I_λ^c 已足够好. 如果不均匀层光学厚，则我们建议用类似于均匀层公式的简化公式代换(9.66)或(9.67)，即

$$I_\lambda^c = \overline{J}_\lambda^c/\overline{k}_\lambda = \frac{\int_{S_1}^{S_2} J_\lambda^c(s)ds}{\int_{S_1}^{S_2} k_\lambda(s)ds}. \tag{9.68}$$

积分区间(S_1,S_2)中,计算的原子或离子品种(Mg^+,Fe^+,O^+……)存在,从而保证$J_\lambda^c(s)\neq 0$,$k_\lambda(s)\neq 0$.

非均匀公式在讨论类星体低价电离发射线(如 Mg Ⅱ 2798 Å, Fe Ⅱ 线等)时可能具有重要性. 按活动星系核宽线区的光致电离模型,大多数低价离子如Mg^+,Fe^+,O^+等都存在于发射气团表面靠近H^+/H^0电离前(H^+和H^0分界面)的两侧. 密度分布很不均匀,$N_{Fe^+}=N_{Fe^+}(s)$,$N_{Mg^+}=N_{Mg^+}(s)\cdots$.

5. 切仑柯夫红移y_t^c(或ΔZ^c)

已指出,切仑柯夫发射线并不精确位于原子本征波长λ_{lu}处,此微小"切仑柯夫红移"可利用(9.61)求导得到. 由$\frac{dI_y^c}{dy}=0$求得此红移为

$$\Delta Z^c \equiv y_t^c \equiv \frac{\Delta\lambda_t}{\lambda_{lu}} = \frac{1}{y_{\lim}^{-1} + \sqrt{y_{\lim}^{-2} + k_2/C_2}}$$

$$= \frac{1}{C_0^{-1}\gamma_c^{-2} + \sqrt{C_0^{-2}\gamma_c^{-4} + k_2/C_2}}. \tag{9.69}$$

为了保证切仑柯夫线辐射的有效性,要求气体稠密,对连续谱光厚(详细的讨论略). 如果气体密度高到使切仑柯夫线宽$y_{\lim} \gg \sqrt{C_2/k_2}$(由(9.62)和(9.63)可知$C_2/k_2$与气体密度无关,但$y_{\lim}\propto N$),则由(6.69)式和(6.63)可得简化的红移公式(当$y_{\lim} \gg \sqrt{C_2/k_2}$):

$$\Delta Z^c \equiv y_t^c \simeq \sqrt{C_2/k_2} = 1.04 \times 10^{-1} \cdot \sqrt{\lambda_{lu} A_{ul} \Gamma_{ul} \left(\frac{g_u}{g_l}\right) R_l R_p^{-1} p^5 \zeta}, \tag{9.70}$$

其中$\zeta = N/N_{H^0}$,是该品种原子(或离子)的"丰度". 注意只当氢电

离度 f 很小时，即 $f\equiv N_{H^+}/N_{H^0}\simeq 0$ 时，(9.70)式中定义的 ζ 才真正代表该品种原子(或离子)的丰度，否则此处的 ζ 可能显著大于真实丰度 $\zeta^{real}\equiv N/N_H$，因为对高电离气体，很有可能 $N_{H^0}/N_H\ll 1$.

另一极限是气体很"稀薄"，使极限宽 $y_{lim}\ll\sqrt{C_2/k_2}$，对比(9.70)式知，也就是 y_{lim} 远小于稠密气体情况下的红移 y_l^c(9.70)式，此时(9.69)式简化为"稀薄"气体红移公式

$$\Delta Z^c = y_l^c \simeq \frac{y_{lim}}{2} \tag{9.71}$$

其中 y_{lim} 由(9.51)式给出.

可见对一条特定切仑柯夫发射线 λ_{lu}，由临界等式 $y_{lim}=\sqrt{C_2/k_2}$ 可求出气体临界密度 N^{cr}：

$$N^{cr} = 1.54 \times 10^2\left(\frac{g_u}{g_l}\right)^{-\frac{1}{2}}\gamma_c^{-2}\lambda_{lu}^{-\frac{7}{2}}A_{ul}^{-\frac{1}{2}}\Gamma_{ul}^{\frac{1}{2}}p^{\frac{3}{2}}(R_lR_p)^{-\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}}, \tag{9.72}$$

其中 $\zeta\equiv N/N_{H^0}$，为该品种原子或离子的"丰度".

简言之，当 $N\gg N^{cr}$，应采用简化红移公式(9.70)，反之，当 $N\ll N^{cr}$，采用第二个近似红移公式(9.71). 提醒读者，不管 $N\gg H^{cr}$ 和 $N\ll N^{cr}$，两个简化公式(9.70)和(9.71)都是在对连续谱光学厚情况下导出的，$\tau_\lambda=(k_1+k_{bf})L\gg 1$. 这里说的"稀薄"，即 $N\ll N^{cr}$，对切仑柯夫线辐射仍为光厚. 在 $N\ll N^{cr}$ 的"稀薄"情况下，不只切仑柯夫红移值变小((9.71)式)，而且谱线轮廓变得对称.

显然，由(9.70)，(9.71)可见，切仑柯夫红移和原子参量 λ_{lu}，Γ_{lu}，A_{ul} 以及原子(离子)能级布居 $R_l\equiv N_l/N$ 及 $R_p\equiv N_{H^0p}/N_{H^0}$ 有关. 因而不同谱线会有略为不同的红移(ΔZ^c 通常很小，读者不妨利用(9.70)计算 H_β 线的切仑柯夫红移，得到的量级仅为 $y_l^c\sim 10^{-3}$，或者表观的退行速度 $\overline{V}$ 仅为每秒几百公里.)但此微小红移有可能用以解释类星体和 Syf.1 星系活动星系核各谱线间的微小红移差这一使天文学家长期困扰的难题(例如参见 Gaskell, C. M., 1982, *Ap. J.*, **263**, 79).

6. 切仑柯夫谱线总强度 I^c

对光厚情况 $\tau=(k_1+k_2)L\gg1$ 的谱强度公式(9.61)作积分

$$I^c=\int_0^{y_{\lim}}I_y^c dy, \tag{9.73}$$

即得一条切仑柯夫发射线总强度 I^c:

$$I^c=Y\left\{\ln(1+X^2)-2\left(1-\frac{\operatorname{arctg}X}{X}\right)\right\}, \tag{9.74}$$

其中参量 $Y\equiv\frac{N_e C_1}{2\ k_2}$,$N_e$ 是相对论电子数密度,$X\equiv\sqrt{\frac{k_2}{C_2}}y_{\lim}$,而 C_0,C_1,C_2,k_2 由(9.63)式给出,$y_{\lim}$ 由(9.51)式给出.

对于 $N\gg N^{cr}$(见(9.72)式)的稠密气体,(9.74)式可以化简,此时 $X\equiv\sqrt{\frac{k_2}{C_2}}y_{\lim}=y_{\lim}/y_l^c\gg1$(参见稠密气体的近似红移公式(6.70)式). 故线强公式(9.74)可简化成

$$I^c\simeq 2Y\{\ln X-1\}\simeq aN_e\frac{C_1}{k_2}. \tag{9.75}$$

其中 $a\simeq1$,将(6.63)式中的系数 C_1,k_2 代入上式,即得

$$I^c\simeq1.40\times10^{-19}\lambda_{lu}^{-1}A_{ul}\left(\frac{g_u}{g_l}\right)p^5\left(\frac{R_l}{R_p}\right)\zeta aN_e$$

$$(\mathrm{erg\cdot cm^{-2}\cdot s^{-1}\cdot sr^{-1}}) \tag{9.76}$$

(9.76)式在 $N\gg N^{cr}$ 时成立(见(9.72)式). 其中 $\zeta\equiv N/N_{H^0}$,计算氢原子谱线时取 $\zeta=1$,N_e 是相对论电子密度.

事实上,稠密气体的线强公式(9.75)或(9.76)式可由简单的物理考虑直接得出. 由于 $N\gg N^{cr}$ 即条件 $y_{\min}\gg y_l^c$,并且,在 $y\leqslant y_l^c$ 的紧邻本征 λ_{lu} 波段上,$k_1\gg k_2$,大的线吸收 k_1 造成了切仑柯夫线的红移. 在 $y_{\lim}\geqslant y\geqslant y_l^c$ 的主要辐射波段上,则有 $k_1\ll k_2$. 所以影响切仑柯夫线出射强度的吸收是 k_2. 故此时出射谱强度公式(9.61)式简化为

$$I_y^c\simeq\frac{J_y^c}{k_2}=\frac{C_1N_e(y^{-1}-y_{\lim}^{-1})}{k_2}\qquad(\text{对于 } y\geqslant y_l^c \text{ 主要波段}). \tag{9.77}$$

已经指出,(9.57)式给出的光电吸收 k_2 是不依赖波长 y 的常量,求总线强时,可从积分号下提出,故有

$$I^c = \int_0^{y_{\lim}} I_y^c dy = \int_0^{y_{\lim}} \frac{J_y^c dy}{k_1 + k_2} \gtrsim \int_{y_l^c}^{y_{\lim}} \frac{J_y^c dy}{k_2} \simeq \frac{\int_{y_l^c}^{y_{\lim}} J_y^c dy}{k_2}.$$

将积分限 $\int_0^{y_{\lim}}$ 改为 $\int_{y_l^c}^{y_{\lim}}$,表示可略去 $0 \leqslant y \leqslant y_l^c$ 无关紧要的狭小波段上的切仑柯夫辐射,那里线吸收 k_1 很大,从而

$$J^c \gtrsim \int_{y_l^c}^{y_{\lim}} J_y^c dy = N_e C_1 \left[\ln\left(\frac{y_{\lim}}{y_l^c} \right) - 1 \right] \simeq a N_e C_1,$$

因此同样得到近似线强公式(9.75).

切仑柯夫线发射机制在高能天体物理中有潜在应用价值.第一候选者是类星体和其它活动星系核,已知这类天体的宽发射线区中有丰富的相对论电子和稠密气体云,这保证了切仑柯夫线辐射的有效性.在活动星系核的宽线区中,通常的由自发跃迁产生的正常线发射(即复合级联过程和碰撞激发)和奇特的切仑柯夫线发射机制两者共存.经过详细论证(参见 You,J.H.& Cheng,F.H.,*Ap.J.*,1987,**332**,174).高价电离线如CⅣ 1549Å,CⅢ 1909Å,NⅤ 1240 Å等来自自发跃迁,是正常线发射.而低价电离线和中性氢线如MgⅡ 2798Å,H_α,H_β 等,是切仑柯夫线发射(但 Ly α 是例外,经典复合理论给出的正常 Ly α 太强,远超过切仑柯夫 Ly α 线强度,后者反倒成为无关紧要).由此可解释类星体、活动星系核一系列有关宽发射线的奇特性质.人们一直认为,切仑柯夫线发射极微弱,其谱线发射系数 J^c 远小于相对的正常线的谱线发射系数(自发跃迁)J^s,因而,可忽略切仑柯夫线辐射对活动星系核宽发射线的贡献.的确,对于足够稀薄的光薄气体,强度比 $I^c/I^s \simeq J^c/J^s \ll 1$.然而我们注意到,对光学厚(甚至对连续谱光厚)的稠密气体,情况非常不同,此时计算出射线强,应当同时考虑发射和吸收.但对通常的自发跃迁线(复合线及碰撞激发线)与奇特的切仑柯夫线,它们遇到的吸收机制极为不同.自发跃迁线精确位于 $\lambda = \lambda_{lu}$ 本征波长处,故其出射强度 I^s 将因线吸收而大为减弱($k_1(\lambda_{lu}) \to \infty$).

而切仑柯夫线则因“切仑柯夫红移”而处在 $\lambda \gtrsim \lambda_{lu}$ 位置上，从而躲过了强的线吸收，因为 $k_1(\lambda > \lambda_{lu}) \to 0$. 因此，切仑柯夫线出射强度 I^c 只受到相对而言很小的光电吸收 $k_2 = k_{bf}$ 的影响，$k_2 \ll k_1(\lambda_{lu})$. 这表示切仑柯夫线光子可从稠密气体的深处逃逸出来. 深度量级为 $L^c \simeq \frac{1}{k_2} \gg \frac{1}{k_1(\lambda_{lu})}$. 从而造成大的出射强度 I^c. 换言之，稠密气体对于切仑柯夫线辐射显得非常“透明”，最终有可能造成 $I^c \gg I^s$，只要相对论电子足够丰富即可.

还可从另一角度论证 $I^c \gg I^s$ 的可能性. 如果稠密气体对连续谱表现为光学厚，而且处于热平衡，则表面出射的是黑体辐射，是具有普朗克谱形的连续谱，而没有正常发射线，$I^s = 0$. 然而，当外来的非热的相对论电子轰击此稠密气体时，将产生切仑柯夫发射线. 这是非热的谱线发射机制（只要相对论电子具有非热能谱分布，远未达到和稠密气体的共同热平衡态），它不会被背景的黑体连续谱“淹没”掉. 出射谱将是黑体连续谱和切仑柯夫线的叠加. 只要相对论电子密度 N_e 足够大，就会有 $I^c \gg I^s \simeq 0$. 这一结论可由辐射转移方程(9.58)的解定量表示出来. 在没有外来相对论电子轰击时，处在热平衡的稠密气体（稠密气体很容易达到热平衡，因为碰撞频繁），源函数当为

$$S_\nu \equiv J_\nu / n_\nu^2 k_\nu = \frac{B_\nu(T)}{n_\nu^2} = \frac{\dfrac{2h\nu^3}{n_\nu^2 c^2}}{\left[\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]}, \quad (9.78)$$

从而出射谱(9.59)式必为普朗克谱形. 但当外来快电子在此热平衡气体中穿行时，则气体介质和外来电子整体不再处于热平衡，其源函数不再为普朗克型（克希霍夫定律失效），$S_\nu \neq B_\nu(T)$. 如果近似假定外来相对论电子不明显破坏原有气体自身的热平衡，只是由于电子加热作用，使气体温度由 T 变高为 $T' = T + \Delta T$，则此时源函数

$$S_\nu \equiv J_\nu / n_\nu^2 k_\nu = \frac{J_\nu^c + J_\nu^{th}}{n_\nu^2 k_\nu} = \frac{J_\nu^c}{n_\nu^2 k_\nu} + \frac{B_\nu(T')}{n_\nu^2}. \quad (9.79)$$

对于厚度 L 的平面平行层均匀发光气体，用波长 λ 代换 ν，求解(9.58)式，利用(9.79)给出之 S_λ，则求出出射谱强度为

$$I_\lambda = n_\lambda^2 S_\lambda (1 - e^{-k_\lambda L}) = (J_\lambda^c / k_\lambda + B_\lambda(T'))(1 - e^{-k_\lambda L})$$

$$\simeq J_\lambda^c / k_\lambda + B_\lambda(T')$$

$$(\text{当}\ \tau_\lambda = k_\lambda L \gg 1). \qquad (9.80)$$

因此，出射谱确为背景黑体辐射连续谱和切仑柯夫线谱 J_λ^c/k_λ(见(9.60)式)的叠加. 在这种情况下，正常谱线是不出现的，$I^s = 0$，$I^c \gg I^s = 0$，因而切仑柯夫发射线成为主要成分(尽管其发射系数 J^c 很小).

参 考 文 献

[1] Bremmer, H., Terrestial Rad.o Waves, 282 Elsivier Publishing Co., New York, 1949.

[2] Jackson, J., Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962. (有中译本)

[3] Jelley J., Čerenkov Rádiation and Its Applications, Pergamon, New York, 1958.

[4] Kolomenskii, A., *Doklad. Akad. Nauk. SSSR.* **106**(1956), (6), 982.

[5] Panovsky, W., Classical, Electricity and Magnetism, Reading, Mass. Addison Wesley. 1955.

[6] Pawsey, J. and Smerd, S, in The Sun ed. G. Kuiper, 1953.

[7] 尤峻汉、程富华，物理学报，29 卷，第七期，(1980).

[8] Junhan You and Fuhua Cheng, *Physical Review*, A **34**, 3015, 1986.

[9] Junhan You and Fuhua Cheng, *Ap. J.*, **322**, 174, 1987.

[10] Fuhua, Cheng and Junhan You, *Ap. J.*, **358**, 18, 1990.

[11] Xu, K. Z., Yang, B. X. and Xi, F. Y., *Phy. Lett.*, A**86**, 24, 1981.

[12] Xu, K. Z., Yang, B. X. and Xi, F. Y., *Phys. Rev.*, A**33**, 2912, 1988.

[13] Xu, K. Z., Yang, B. X. and Xi, F. Y., *Phys. Rev.*, A**40**, 5411, 1989.